微分方程式（1 年）2022 年度（2023 年 2 月 2 日 2 限）　期末試験問題

担当：真貝寿明・塚本勝俊　　対象：IS 科 IN 科 1 年　　参照可能物：なし

【重要】　別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由とするが，答案用紙には，どの問題か分かるように記載すること．
答案には，答えだけではなく導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．

問題 **1**　（自然現象のモデル化，20 点）
次の微分方程式を立てよ．各自で導入した記号には説明をつけること．

(1) xy 平面上の各点で，接線の傾きが e^x である曲線がみたす微分方程式.

(2) x 軸上を動く物体の加速度が，原点からの距離の 2 乗に反比例することを示す微分方程式.

(3) 新型コロナ感染者数が，ある地域で，感染者数の 2 乗に比例して増加していると共に感染者数の 3 乗に比例して回復していく．感染者数に対する微分方程式.

(4) 球形の風船に毎秒一定量の空気を入れるとき，その半径の変化を示す微分方程式.

問題 **2**　（基本的な微分方程式，30 点）
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解（初期条件が与えられているものは特殊解）を求めよ.

(1) $y' - 4y = 0,\ \ y(0) = 2$

(2) $y' - 4y = 8e^{-4x}$

(3) $y' - 4y = 2e^{4x}$

(4) $y' - 4y = 17\sin x$

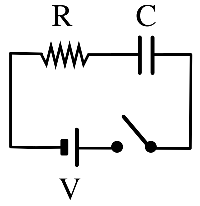
(5) $y'' + 4y = 0$

(6) $y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 2$

以下の３問のうち，２問を選択して解答せよ．

問題 3　（1 階微分方程式の応用，25 点）

抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサで構成される RC 直列回路に，起電力 V（一定）の直流電源を接続し，時刻 $t = 0$ でスイッチを入れる．コンデンサに蓄電される電荷の量 $Q(t)$ は，微分方程式



$$\text{起電力}=\sum \text{電圧降下} \quad \text{すなわち} \quad V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

をみたす．$Q(0) = 0$ とする．$Q(t)$ を求め，グラフの概形を描け．

問題 4　（2 階微分方程式の応用，25 点）

振動するブランコの運動方程式は，振動中心からの位置 x を時間 t の関数 $x(t)$ として，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

となる．ここで，m, k, c, $F(t)$ は，それぞれ質量，振動の比例定数，空気抵抗の比例定数，加える外力である．なお，以下の (2) と (3) では厳密に $x(t)$ を求める必要はない．

(1) $m = 1$, $k = 5$, $c = 4$, $F(t) = 0$ のとき，$x(t)$ を求め，初期値を適当に仮定して，グラフの概形を描け．

(2) $m = 1$, $k = 5$, $c = 4$, $F(t) = \cos 2t$ のとき，どのような運動になるかを数行で述べよ．

(3) $m = 1$, $k = 4$, $c = 0$, $F(t) = \cos 2t$ のとき，どのような運動になるかを数行で述べよ．

問題 5　（微分方程式の概念，25 点）

(1) 微分方程式の「一般解」「特殊解」「特異解」の違いを説明せよ．

(2) 関数の独立性の定義と判定方法を述べよ．

(3) $y(x)$ に対する微分方程式 $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$ の特性方程式が，$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$ となることを導け．（a, b, c, d は定数とする）

(4) 運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F(x, t)$ を数値計算することになった．使おうとしている手法は，1 階の微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = f(y, t)$ を解くものである．この手法を使う際には，運動方程式をどのように変形すればよいか．