微分方程式（1 年）2023 年度　期末試験　問題案

担当：真貝寿明・塚本勝俊　　対象：IS 科 IN 科 1 年　　参照可能物：なし

【重要】　別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由とするが，答案用紙には，どの問題か分かるように記載すること．
答案には，答えだけではなく導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．

問題 1　（自然現象のモデル化，20 点）

次の微分方程式を立てよ．各自で導入した記号には説明をつけること．

(1) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\tanh x$ である曲線がみたす微分方程式.

(2) 自然長からの伸び縮みの長さの 2 乗に比例する力を与えるバネによって加速度が決まる物体の運動を示す微分方程式.

(3) 半径 r の球形で近似される宇宙が膨張している．内部のエネルギーが不変だとすれば，温度 T が体積に反比例して決まる．半径 r を変数として温度を求める微分方程式を示せ.

(4) コロナの感染者数が，その時点での感染者数の 3 乗に比例して増加することを示す微分方程式と，インフルエンザの感染者数が，その時点でのインフルエンザの感染者数に比例して増加するとともに，コロナの感染者数の 2 乗にも比例して増加することを示す微分方程式を示せ.

問題 2　（基本的な微分方程式，30 点）

$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を求めよ．初期条件が与えられているものは特殊解も求めよ.

(1) $y' + 4y = 0,\ \ y(0) = 2$

(2) $y' + 4y = 8e^{4x},\ \ y(0) = 2$

(3) $y' + 4y = e^{-4x},\ \ y(0) = 2$

(4) $y' + 4y = 17 \sin x$

(5) $y'' + 4y = 0\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -4$

(6) $y'' + 2y' + 4y = 0$

以下の３問のうち，２問を選択して解答せよ．

問題 3　（1 階微分方程式の応用，25 点）

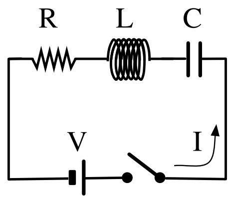
沸かし終えた風呂の温度の時間変化率は，そのときの室温との差に比例する．すなわち，室温が 10 [°C] のとき，時刻 t における風呂の温度 $T(t)$ [°C] は，

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-10) \ \ (k>0; \text{定数})$$

となる．いま，$t=0$ で 60 [°C] だったとき，$T(t)$ を求め，グラフの概形を描け．
さらに，10 分後に 55 [°C] になったとき，20 分後の温度を求めよ．

問題 4　（2 階微分方程式の応用，25 点）

抵抗値 R の抵抗，インダクタンス L のコイル，容量 C のコンデンサで構成される RLC 直列回路を考える．V を回路の起電力とすると，キルヒホフの法則により，時間 t を変数にする電流 $I(t)$ に対して次の微分方程式が成り立つ．



$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}.$$

R, L, C は正の定数とし，$CR^2 > 4L$ の関係があるとする．いま，電源として直流電源 $V = (\text{一定})$ をつなぎ，時刻 $t=0$ でスイッチを入れた．この微分方程式の一般解 $I(t)$ を求め，グラフの概形を示せ．

問題 5　（微分方程式の概念，25 点）

(1) $y(x)$ に対して，1 階の定数係数非同次線形常微分方程式の例を 1 つ挙げよ．

(2) 「常微分方程式」と「偏微分方程式」の違いを説明せよ．

(3) 関数の独立性の定義と判定方法を述べ，関数 $\sin x$ と $\cos x$ が独立な関数であることを示せ．

(4) 関数 $e^{-2x}(\cos 3x + 2\sin 3x)$ が解となるような微分方程式とその初期条件を答えよ．

(5) 運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F(x,t)$ を数値計算することになった．使おうとしている手法は，1 階の微分方程式 $\dfrac{dy}{dt} = f(y,t)$ を解くものである．この手法を使う際には，運動方程式をどのように変形すればよいか．