第 0 章　準備

0.1　データ処理の基本

0.2　集合

問題 0.1 1 つのサイコロを振って出る目を考える．全体集合を

$$\Omega = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$$

とし，その部分集合

$\mathbf{A} = \{⚀, ⚁, ⚂\}$，$\mathbf{B} = \{⚁, ⚃, ⚅\}$，$\mathbf{C} = \{⚂, ⚃\}$

について，次の集合を求めよ．

(1) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$　(2) $\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}}$

(3) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$　(4) $(\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}) \cap \overline{\mathbf{C}}$

(5) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap \overline{\mathbf{B}}$　(6) $(\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}) \cap \mathbf{C}$

0.3　指数関数・対数関数

0.4　数列・級数

0.5　微分法

0.6　積分法

0.7　ベクトル・行列

第 1 章　確率

1.1　順列・組み合わせと数え上げ

1.1.1　数え上げ

例題 1.1 1 列に並んだ 4 枚の板を青か赤に塗る．青は連続してもよいが，赤は連続してはいけない．塗り方は何通りあるか．

例題 1.2 （約数の数） 次の数の正の約数はいくつあるか．

(1) 60　(2) 600　(3) 6000

例題 1.3 同じジュース 9 缶を 3 人の学生に分ける．学生に区別を付けないとき，何通りの分け方があるか．

(1) どの学生も少なくとも 1 缶はもらう場合．

(2) 1 缶ももらわない学生がいてもよい場合．

1.1.2　順列

例題 1.4 （辞書的配列） 5 個の文字 `a,b,c,d,e` をすべて用いてできる 120 個の順列を辞書式に `abcde` から `edcba` まで並べる．`cdaeb` は何番めか．

例題 1.5 7 人が並ぶ．次の並び方は何通りあるか．

(1) 7 人が一列に並ぶとき．

(2) 7 人のうち 5 人が一列に並ぶとき．

(3) 7 人が一列に並び，そのうち特定の 2 人が隣り合うとき．

例題 1.6 （展開係数） $(a+b+c)^6$ を展開したときの a^3bc^2 の係数はいくつか．

例題 1.7 東西に $n+1$ 本，南北に $m+1$ 本の碁盤の目の道路からなる町がある．北西の端から，南東の端までの最短経路は，何通りあるか．

例題 1.8 （モールス信号） モールス信号は，長符号 — と短符号 · の組み合わせで文字を表現する．アルファベット 26 文字と数字 10 文字，および記号 15 個を作るとき，最低いくつの符号を用いればよいか．

1.1.3　組み合わせ

問題 1.9 ${}_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n+1}\mathrm{C}_r$ を示せ．

例題 1.10 同じジュース 9 缶を 3 人の学生に分ける．学生に区別を付けるとき，何通りの分け方があるか．

(1) どの学生も少なくとも 1 缶はもらう場合．

(2) 1 缶ももらわない学生がいてもよい場合．

問題 1.11 10 個のリンゴを 4 つの皿に盛る．何通りの分け方があるか．

(1) 少なくとも 1 つは皿に載せる場合．

(2) 1 つもない皿があっても良い場合．

例題 1.12 （展開係数） $(a+b+c)^6$ を展開したときに，異なる項はいくつ出現するか．

1.1.4　2 項定理

1.2 確率

1.2.1 確率の定義

問題 1.13 次の文章の真偽を確かめよ．

(1) サイコロを振ったとき，事象は「⚀ の目が出る」か「1 の目が出ない」に分けられるから,「⚀ の目が出る確率は 1/2 である」．

(2) コインを 2 個投げたとき，それぞれ表か裏が出るが,「2 枚とも表」となるのは，全事象が $\mathbf{S} = \{$ 表と表，表と裏，裏と裏 $\}$ の 3 つであるから 1/3 の確率である．

例題 1.14 （じゃんけん） N 人でじゃんけんをしたとき，1 回で 1 人が勝つ確率を求めよ．

例題 1.15 （丁か半か） サイコロを 2 つ投げて,「丁（偶数）か半（奇数）か」と威勢良く賭博するシーンが時代劇に見られる．

(1) 賭けているのは，サイコロの 2 つの目の積か，それとも和か．

(2) 2 つの目の和が 7 となるのと 8 となるのはどちらが多いか．

問題 1.16 3 つのサイコロを同時に投げたとき，出た目の和が 10 となる確率を求めよ．

例題 1.17 （くじ引きの順番） 5 本のくじがあり，2 本が当たりである．5 人が順にくじを引くとき，何番目にくじを引くのが最も有利か．

例題 1.18 A, B, C の 3 人が，この順に繰り返して 1 枚の硬貨を投げ，最初に表が出た人を勝ちとする．A, B, C それぞれが勝つ確率 $P_{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{B}}, P_{\mathrm{C}}$ を求めよ．

問題 1.19 例題 1.18 で，A, B, C が順に 1/3 の確率で当たるくじを引き，最初に当たりが出た人を勝ちとする場合はどうか．

例題 1.20 （ド・メレの問題） 2 つの賭けがある．

(A) 1 つのサイコロを 4 回投げて，少なくとも 1 回 ⚅ の目が出れば勝ち．

(B) 2 つのサイコロを 24 回投げて，少なくとも 1 回 ⚅⚅ のゾロ目が出れば勝ち．

貴族ド・メレは，次のように考えた．

(A) ⚅ の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ なので，4 回投げれば 4 倍して $\dfrac{2}{3}$．

(B) ⚅ のゾロ目が出る確率は $\dfrac{1}{36}$．24 回投げれば 24 倍して $\dfrac{2}{3}$．

したがって，どちらも同じと考えた．しかし実際には，(A) では勝つことが多かったが，(B) では負けてしまうことが多かった．どう考えれば正しいか．

問題 1.21 大学受験の模擬試験で，合格可能性 50%と判定された大学が 5 校ある．5 校すべてを受験するとき，少なくとも 1 校に合格する確率はいくらか．

問題 1.22 10 枚のうち 1 枚の割合で当たる福引券がある．この福引券を何枚持つと，少なくとも 1 枚当たる確率が 90%以上になるか．

例題 1.23 （誕生日が同じ人がいる確率） 1 クラスに N 人の学生がいる．誕生日が同じ学生がいる確率はどれだけか．N を横軸にして，確率をグラフにせよ．

例題 1.24 （ビュフォンの針） 平行線が $2d$ の間隔で無数に引かれている平面に，長さ 2ℓ（ただし $\ell < d$）の針を何回も無作為に落とすとき，この針が平行線と交わる確率 p を実験することによって，円周率 π を求めることができる．この理由を説明せよ．

1.2.2 期待値

例題 1.25 力の互角な A, B 2 チームが，先に 4 勝した方を勝者とするとき，平均して何試合で勝敗が決まるか．引き分けはないものとする．

例題 1.26 （ド・メレの問題） A と B の 2 人が互角の力量をもつ勝負をして，3 回先に勝った方が賭け金 64 ピストル（ピストルは当時のフランスの金貨の単位）を取る約束をした．A が 2 回連勝したところで用事により勝負を中止したので，賭け金の分配に困った．勝負に引き分けはないものとして，この時点で，賭け金をいくらに分配したらよいか．

問題 1.27 例題 1.26 で，次の場合は賭け金をいくらに分配したらよいか．

(1) A が 2 勝 1 敗で中止した場合．

(2) A が 1 勝 0 敗で中止した場合．

例題 1.28 （一人っ子政策） ある国で，男の子の一人っ子政策が考案された．どの家も男の子が生まれるまで子供を産み続け，男の子が生まれたら，もう子供はつくらない．男女の誕生比が 1/2 だとして，この国の男の子と女の子の人口比はどうなるか．

問題 1.29 （じゃんけんの勝負数） A と B の 2 人がじゃんけんをする．平均して何回で勝負がつくか．