1.3　条件つき確率・Bayes の定理

1.3.1　条件つき確率

例題 1.30 ホテルに 3 部屋あり，それぞれに男 2 人，男と女，女 2 人が宿泊している．ボーイがドアをノックしたところ，女の声で「誰か来たから開けて」と聞こえた．このとき，ドアを開けるのが男である確率はいくらか．

例題 1.31 （不良品製造元の判定） 同種の部品があり，A 社と B 社が 60%, 40%の比で販売シェアを持っている．しかし，A 社製では 3%，B 社製では 4%の不合格品が発生する．いま，不合格品が発見されたとき，それが A 社製である確率を求めよ．

例題 1.32 （HIV 検査薬） ある HIV 検査薬は，本来「陰性」なのに「陽性」と誤判定する確率が 1%あり，その逆の判定はない．「HIV に感染している」という事象を A,「陽性の判定を受ける」と事象を B とする．

(1) $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ と $P(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}})$ を示せ．

(2) 日本人 1 億人のうち，HIV 感染者が 10 万人，すなわち $P(\mathrm{A}) = 0.001$ とする．この検査薬で「陽性」と判定されたとき，実際に「HIV に感染している」となる有効判定の確率を求めよ．

(3) この HIV 検査薬は信頼できるだろうか，考えを述べよ．

例題 1.33 （傘を忘れたとき） 酒が入ると 5 回に 1 回の割合で傘を忘れる K 君が，A, B, C 3 軒の飲み屋をはしごして，傘を忘れたことに気がついた．傘がある確率がもっとも高い店はどこか．

問題 1.34 0 と 1 の信号をそれぞれ確率 0.6, 0.4 で送る装置がある．送信信号が 0 であると，受信側で正しく 0 と受け取る確率が 0.8，誤って 1 と受け取る確率が 0.2 である．また，送信信号が 1 であると，受信側で正しく 1 と受け取る確率が 0.9，誤って 0 と受け取る確率が 0.1 である.「0 と受信したとき，送信信号が実際に 0 である確率」を求めよ．

例題 1.35 （サーベロニの問題） A,B,C の 3 人の囚人のうち，2 人が処刑され 1 人は釈放されることになっているが，A にはそれが誰かは知らされていない．A は看守に「B か C のどちらかは確実に処刑されるのだから，あなたが B か C のどちらが処刑されるかを私に教えてくれても，私自身のことについては何も教えないことになる」と言った．その看守は，この論法を正しいと認めて「B が処刑される」と答えた．その看守が答える前は，

A が処刑される確率は $\dfrac{2}{3}$

であったが，答えを聞いた後では，処刑される可能性がある者は彼自身と C の 2 人しかいないことになるので，

A が処刑される確率は $\dfrac{1}{2}$

となるから，A は以前より幸福であると感じた．A が幸福と感じるのは正しいといえるか．

例題 1.36 ある事件の逃走犯を目撃した証人 A と B は「犯人はネクタイをしていた」と述べ，証人 C は「ネクタイをしていなかった」述べた．証人 A, B, C が真実を語る確率がそれぞれ 70%，80%，90%であるとき，犯人がネクタイをしていた可能性を求めよ．ただし，実際に犯人がネクタイを着用していたかいないかの確率は等しいものとする．

問題 1.37 （ポリヤの壺） 壷の中に r 個の赤球と b 個の黒球が入っている．この中から 1 個取り出して色を見た後に，取り出した球をもとに戻すと共に同色の球を c 個入れる．これを繰り返すとき，k 番目に赤球が出る確率を R_k，黒球が出る確率を B_k とする．次の確率を求めよ．

(1) $P(R_2|R_1)$, $P(R_2|B_1)$

(2) $P(R_2)$, $P(B_2)$

(3) $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$

(4) n 回目に赤球が取り出される確率が $P(R_n) = \dfrac{r}{r+b}$ であることを数学的帰納法によって示せ．

問題 1.38 （モンティ・ホール問題） A,B,C の 3 つの扉があり，そのうちの 1 つのドアの後ろにある豪華商品を当てるテレビ番組のコーナーがある．司会者のモンティ・ホールだけが正解の扉を知っている．
挑戦者が A の扉を選んだ．すると，司会者は残された扉のうちから B を開け，それが外れであることを挑戦者に見せ，次のように言った．
「はじめに選んだ A の扉のままでもよいが，ここで C の扉に変更してもよいですよ」
さて，挑戦者は扉を A とするのがよいか，C とするのがよいか．

1.3.2　Bayes の定理

例題 1.39 箱に子犬が 4 匹いて，オスとメスの割合はわからない．1 匹とりだすとオスだった．オスが全部で 3 匹いる確率はいくらか．

例題 1.40 （迷惑メールのフィルタリング） 電子メール 6 通に対し，ユーザが迷惑メールかそうでないかの判定をした．メール中に特定の（独立に出現する）単語 A と B が含まれている (○) か含まれていないか (×) の判定表がある．

メール	単語 A	単語 B	判定
1	○	×	迷惑
2	○	○	迷惑
3	×	×	迷惑
4	○	×	通常
5	×	○	通常
6	×	○	通常

このデータをもとに，迷惑メールの判別ソフトを作成したい．

(1) 迷惑メールに単語 A が含まれる確率を求めよ．

(2) 通常メールに単語 A が含まれる確率を求めよ．

(3) あるメールが単語 A を含むと分かったとき（単語 B に関しては不明）そのメールが迷惑メールである事後確率と通常メールである事後確率を比較せよ．

(4) あるメールが単語 A は含むが単語 B は含まないと分かったとき，そのメールが迷惑メールである事後確率を求めよ．

第 1 章 章末問題

$\boxed{1.1}$ **（三角形を移動する問題）** 三角形 ABC の頂点 A から出発し，硬貨を投げて表が出れば右回りに，裏が出れば左回りに，頂点を 1 つずつ回る．n 回投げたとき，A にいる確率 P_n を求めよ．

$\boxed{1.2}$ **（火事になる確率）** 3 軒の家が 1 列に並んでいる．1 年間に 1 軒の家から出火する確率は p であり，隣の家から延焼する確率が q であるとする．それぞれの家は独立に出火するものとし，飛び火することはないとして，端の家と中央の家がそれぞれ火事になる確率を求めよ．

$\boxed{1.3}$ **（魔法使い探知機）** 学生数 1 万人の某大学には魔法使いが 1 人いた．魔法使い探知機があるが，誤判定率は 10%である．つまり，人間であっても魔法使いと判定する率が 10%あり，その逆の判定も 10%である．

(1) 1 人を調べたとき，探知機が「魔法使い」と判定する確率．

(2) 探知機が「魔法使い」と判定を下したとき，実際にその人が魔法使いである確率．

$\boxed{1.4}$ **（お見合い戦略）** n 人とお見合いをする．相手には自分に合う 1 位から n 位までの順位がついている．順に 1 人づつと出会い，結婚するかどうかの判断を下す.（当然ながら一度相手を決めたらそこで終わりであり，一度見送ったらその相手とは再び出会えない）．最後の 1 人になった場合は，その相手と結婚することになる．次の戦略を考えた．

- 最初の a 人はすべて断る．
- $a+1$ 人目からは，それまでよりも良い人が現れたら結婚する．

第 1 位の人を選ぶ確率を高くするためには，a をどう決めたらよいか．

$\boxed{1.5}$ 上記の $\boxed{1.4}$ のお見合い戦略をプログラムを組むことによってシミュレーションせよ．順位の期待値はいくらになるかを計算せよ．

第 2 章　確率分布

2.1　確率変数と確率分布

2.1.1　確率変数

2.1.2　離散確率分布・連続確率分布

2.1.3　累積分布関数

2.1.4　一様分布

問題 2.1 確率密度分布が，$x=[0,x_0]$ で定義される「上に凸の 2 次関数」であるとする．

(1) 確率密度関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 累積分布関数 $F(x)$ を求めよ．

2.1.5　ガイド　いろいろな確率分布

2.2　確率分布を特徴づける量（1）：1 次元の確率変数

例題 2.2 次の 2 つの一様分布について，平均値を求めよ．

(1) 離散一様分布のとき

$$P(X=x_i)=\frac{1}{n} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

(2) 連続一様分布のとき．密度関数 $f(x)$ は次式とする．

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a\le x\le b) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

2.2.1　分散・標準偏差

問題 2.3 連続型分布について次式を示せ．

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$$

例題 2.4 例題 2.2 で扱った離散一様分布と連続一様分布について，分散を求めよ．

例題 2.5 **（期待値・分散の合成公式）** 次の式が成り立つことを示せ．a,b を定数とする．

$$\begin{aligned} E[aX+b] &= a\,E[X]+b \\ V[aX+b] &= a^2\,V[X] \end{aligned}$$