例題 2.6 期待値が $\mu = E[X]$，分散が $\sigma^2 = V[X]$ である確率変数 X があるとする．

(1) $Z = \dfrac{X-a}{b}$ で定義された確率変数 Z の平均値と分散を求めよ．ただし，a, b は定数として，$b \neq 0$ とする．

(2) さらに，$a = \mu$, $b = \sigma$ とすると，Z の平均値と分散はどうなるか．

例題 2.7 サイコロを 2 回振るとき，1 回目に出る目を X_1，2 回目に出る目を X_2 とする．$X_1 + X_2$ を 5 で割るときのあまりを Y として，

(1) Y の分布表を作れ．

(2) $E[Y], V[Y]$ を求めよ．

例題 2.8 （電車の待ち時間） 毎時 0 分と 40 分に発車する電車がある．このことを知らずに T さんが駅に行くとき，彼女の平均待ち時間を求めよ．駅に到着する確率は，各分 1/60 であるとせよ．

例題 2.9 （バスの待ち時間） あるバス停では，到着するバスの間隔（t 分）が

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{500} t\,(10-t) & (0 \leq t \leq 10) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

の確率密度関数で与えられる．

(1) $0 \leq t \leq 10$ での累積分布関数を求めよ．

(2) 1 分以内に次のバスが来る確率はいくらか．

(3) バスの平均間隔を求めよ．

例題 2.10 次の確率密度関数をもつ確率変数 X の平均値と分散を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x^2} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

2.2.2　積率（モーメント）

2.2.3　歪度・尖度

2.3　確率分布を特徴づける量（2）：多次元の確率変数

2.3.1　同時確率分布，周辺確率分布

2.3.2　共分散，相関係数

例題 2.11 次式を示せ．

$$\begin{aligned} E[X+Y] &= E[X] + E[Y] \\ V[X+Y] &= V[X] + V[Y] + 2\,\mathrm{Cov}[X,Y] \end{aligned}$$

問題 2.12 次式を示せ．

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]\,E[Y]$$

2.3.3　確率変数の独立性

例題 2.13 1 組 52 枚のトランプから 1 枚のカードを引いたとき，

$$X = \begin{cases} 0 & (\text{ダイヤ}) \\ 1 & (\text{else}) \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0 & (\text{絵札}) \\ 1 & (\text{else}) \end{cases}$$

とするとき，確率変数 X, Y は独立か．

2.4　確率分布を特徴づける量（3）：母関数・特性関数

2.4.1　確率母関数

例題 2.14 ２項分布 $B(n,p)$ に対する確率母関数 $G(z)$ を求め，２項分布の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求めよ．

問題 2.15 確率変数 X_1, X_2 が互いに独立で，それぞれの取りうる値が非負の整数値であるとする．これらの和である $S = X_1 + X_2$ の分布を考えると，X_i の確率母関数を $G_i(z)$，S の確率母関数を $G_S(z)$ とすれば，

$$G_S(z) = G_1(z)\,G_2(z)$$

が成り立つことを示せ．

2.4.2　積率母関数

例題 2.16 （２項分布の積率母関数） 2 項分布 $B(n,p)$ に対する積率母関数 $M(t)$ を求め，２項分布の平均値と分散を求めよ．

例題 2.17 （正規分布の積率母関数） 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に対する積率母関数 $M(t)$ を求め，正規分布の平均値と分散を求めよ．

2.4.3　特性関数

2.5　離散型確率分布

2.5.1　２項確率，Bernoulli 試行

例題 2.18 サイコロを 10 回振るとき，⚀ の目が 8 回出る確率を求めよ．

問題 2.19 サイコロを 10 回振るとき，⚀の目が 5 回以上出る確率．

例題 2.20 （無作為に答えたマークシート） あるマークシート形式の問題には 5 つの答の選択肢があり，正答は 1 つである．問題が難しかったので，10 人の受験生全員が無作為に答えた．このとき，正解者が少なくとも 2 人いる確率を求めよ．

2.5.2 Bernoulli 分布

例題 2.21 Bernoulli 分布の平均 $E[X]$，分散 $V[X]$ を求めよ．

2.5.3 ２項分布

例題 2.22 日本人の血液型は 10 人に 3 人の割合で O 型である．100 人の日本人を任意に選んだとき，そのうちの O 型の人数を X とする．X の平均値と標準偏差を求めよ．

例題 2.23 （酔歩問題） ある酔っぱらいが，1 歩進むごとに，右か左へそれぞれ 1/2 の確率でよろけながら進んでいる．10 歩進んだとき，右または左へ何歩分よろけているか．

2.5.4 Poisson 分布

例題 2.24 50 人いるクラスの中で，誕生日が 1 月 1 日の人の人数 $k = 0, 1, \cdots, 4$ 人の確率を，(a) ２項分布にしたがうとする場合，(b) Poisson 分布にしたがうとする場合のそれぞれについて求めよ．

例題 2.25 ある製品の生産ラインの不良品発生率は 0.03 である．このラインで生産された製品からランダムに 100 個を取り出すとき，不良品が 3 個以上ある確率はいくらか．

(1) ２項分布にしたがうとして求めよ．

(2) Poisson 分布にしたがうとして求めよ．

例題 2.26 あるスーパーコンピュータは，8 万台の CPU を持つシステムである．1 つの CPU の故障頻度は 10 年に 1 度の割合（1 時間あたりの故障率 $p = 1/(10 \times 365 \times 24)$）である．システム全体では，1 時間あたり，故障頻度はどのくらいか．

問題 2.27
Poisson 分布は，ロシアの統計学者 Bortkiewicz によって再発見された．彼は馬に蹴られて死亡するプロシア軍の兵士の数を 20 年間にわたって調べ，そのデータが Poisson 分布と一致することを発表した (1898 年)．下のデータは，1 年あたり 1 師団ごとにその死亡者数をまとめたものである．このデータの標本平均値が 0.61 であることから，Po(0.61) で近似せよ．(電卓使用可)

死亡者数	師団数
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1
5 以上	0

2.5.5 幾何分布

問題 2.28 幾何分布の積率母関数が $M(t) = \dfrac{p}{1 - qe^t}$ であることを示し，これを用いて $E[X], V[X]$ を求めよ．

例題 2.29 ⚀ の目が出るまで 1 つのサイコロを投げ続ける．

(1) 初めて ⚀ の目が出るのは，平均して何回目か．

(2) 15 回以上投げる確率を求めよ．

2.5.6 Pascal 分布

2.5.7 負の２項分布

2.5.8 超幾何分布

2.6 連続型確率分布

2.6.1 正規分布

2.6.2 標準正規分布

2.6.3 標準正規分布表

例題 2.30 （偏差値） テストの採点結果，平均点 μ が 70 点，標準偏差 σ が 15 点となった．人数分布が正規分布にしたがうとして，偏差値（平均値を 50，標準偏差を 10 とするデータの標準化）を計算する．

(1) 80 点，90 点，100 点の人の偏差値はそれぞれいくらか．

(2) 上位 10%の人の成績を A とするとき，何点以上が A となるか．

(3) 50 点未満の人を不合格とするとき，不合格者は全体の何%か．

問題 2.31 （知能指数） 知能指数（平均値を 100，標準偏差を 15 とするデータの標準化）について答えよ．

(1) 知能指数が 125 の人がいる．偏差値相当ではいくつか．

(2) 1 万人のうち，知能指数が 150 以上の人はおよそ何人いると考えられるか．

(3) 世界に知能指数 200 以上の人は何人いると考えられるか．

問題 2.32 （成績の５段階評価） 学校教育現場では，成績を 5 段階評価することがしばしばある．試験成績が平均 μ 点，標準偏差 σ 点であるとき，下の表のように 5 段階評価を行った．空欄を埋めよ．

評価	素点	偏差値	人数比
5	$\mu + 1.5\sigma$ 以上		
4	$\mu + 0.5\sigma$ から $\mu + 1.5\sigma$		
3	$\mu - 0.5\sigma$ から $\mu + 0.5\sigma$		
2	$\mu - 1.5\sigma$ から $\mu - 0.5\sigma$		
1	$\mu - 1.5\sigma$ 以下		