

第5章 推定

5.1 統計的推測 (推定) とは

5.2 点推定

5.2.1 推定値と推定量

5.2.2 推定量の良さの基準

例題 5.1 標本分散 S^2 は 不偏推定量ではなく, 標本不偏分散 s^2 は 不偏推定量であることを示せ.

5.2.3 推定量の見つけ方

例題 5.2 ある神社で 10 人がおみくじを引いたところ 8 人が吉だった. このおみくじで, 吉の含まれていた確率 p を最尤法で推定せよ.

例題 5.3 母集団が正規分布 $(N(\mu, \sigma^2))$ であり, 分散が既知で σ^2 のとき, 標本 (x_1, x_2, \dots, x_n) を用いて母平均を求める 最尤推定量 はどのような式か.

例題 5.4 母集団が正規分布であるが, 母平均も母分散も未知のとき, 標本 (x_1, x_2, \dots, x_n) を用いて母平均 μ と母分散 σ^2 を求める 最尤推定量 はどのような式か.

問題 5.5 (池にいる魚の数) ある池にいる魚の数 N を推定したい. m 匹の魚をとらえ, すべてに印をつけて再度放流した. 後日, 再び n 匹の魚をとらえたところ, k 匹の魚にマークがついていた. この確率は N を変数とすれば

$$f(N) = \frac{m C_k \times N - m C_{n-k}}{N C_n} \quad (5.2.1)$$

となる. これより, N を推定する式を最尤法を用いて求めよ.

5.2.4 母集団と点推定

5.3 区間推定

5.3.1 信頼度・信頼区間・危険率

5.3.2 正規母集団に対する母平均 μ の区間推定法

例題 5.6 ペットボトルでロケットを 5 回飛ばしたところ, 飛距離が 40m, 38m, 55m, 51m, 48m だった. 飛距離が正規母集団 $N(\mu, 10^2)$ にしたがうとして, 平均値 μ を信頼度 95% で区間推定せよ. また, 99% の信頼度ではどうするか.

例題 5.7 例題 5.6 で, 母分散 σ^2 が未知のときはどうか.

5.3.3 正規母集団に対する母分散 σ^2 の区間推定法

例題 5.8 ある列車の各車両の乗客数は, 90, 105, 110, 95, 88 だった. 通常のときの各車両の乗客数の分散 σ^2 を 95% の信頼区間として求めよ.

5.3.4 2項母集団に対する母比率 p の区間推定法

例題 5.9 ある選挙区で 100 人の有権者を無作為に調べたところ, A 党の支持者は 40 人いた. この地区での A 党の支持率を 95% と 99% の信頼度で推定せよ.

例題 5.10 (世論調査の人数) 内閣支持率 p を精度 $\pm 2\%$ 以内で推定するためには, 標本サイズ n は何人以上必要か. 信頼度 95% で考えよ.

例題 5.11 (テレビ視聴率の精度) あるテレビ視聴率調査会社は, 関東地区 1500 万世帯のうち, 600 世帯にのみ調査機械を置いている. この会社の報告するテレビ視聴率は, 何%の誤差を伴うか. 信頼度 95% で考えよ.

5.3.5 相関係数 r の区間推定法

例題 5.12 ある学年の 40 人の学生について, 英語と数学の成績の相関係数を算出したところ, $r = 0.6$ となった. この母集団の相関係数 ρ を 95% の信頼区間で求めよ.

第5章 章末問題

5.1 (100 人に聞きました) あるテレビ番組で, 被験者 100 人にアンケートをした結果, 60 人が「そのダイエットを試したことがある」と語った. 母集団にこの値を適用すると, ダイエットを試したことがある人の確率はどのくらいといえるか. 信頼係数を 95% として区間推定せよ. また, 80 人がそのように答えた場合はどうか.

5.2 (電子メール送信数) 1 日に何通電子メールを送信するか, という質問に対し, 1600 名が回答した. その結果は, 平均 12.3 通で, 標準偏差は 24.5 だった.

- (1) 分布の平均値から標準偏差の 1 倍左側の値は負になる. この事実はどう解釈したら良いか.
- (2) この母集団に対する 1 日あたりの電子メールの送信数を 90% の信頼度で区間推定せよ.

5.3 (有効推定量) 正規母集団から大きさ n の標本をとり, 標本平均 \bar{X} を得た. このとき, Cramér-Rao の不等式 (5.2.3) で等号が成立することを示し, \bar{X} が母平均 μ の有効推定量であることを述べよ. 母分散 σ^2 は既知の量とする.

第6章 検定

6.1 仮説の検定

6.1.1 仮説検定の手順

6.1.2 検定に関する注意点

例題 6.1 あるサイコロを 60 回振ったところ、偶数の目が 40 回、奇数の目が 20 回出た。このサイコロが『いかさま』であると言えるか。有意水準 1% で検定せよ。

例題 6.2 A 君は毎日計算テストをしている。昨年の平均点 μ_0 は 60 点だった。今年に入ってから 25 回のテストがあり、平均点 μ_1 が 67 点、標準偏差 σ_1 が 20 点である。

- (1) 今年のデータだけから、今後予想される平均点を信頼区間 95% で推定せよ。今年のデータが正規分布にしたがうと仮定してよい。
- (2) 昨年より今年の成績が良いといえるのか、有意水準 5% で右側検定せよ。 $z = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1 / \sqrt{n}}$ が正規分布にしたがうと仮定してよい。

6.2 統計量の検定

6.2.1 ガイド 検定方法の概略

6.2.2 正規母集団に対する母平均 μ の検定

例題 6.3 あるスーパーで売られている肉のパックは 1 kg と表示されているが、16 個を抽出して測ったところ、平均値 $\bar{x} = 998.2$ g だった。このスーパーでは故意に少なめにパックしているといえるだろうか。次の 2 つの場合について、有意水準 5% で検定せよ。

- (1) この店の秤が古くて、標準偏差 $\sigma = 4.0$ g であることが分かっている場合。

6.3 適合度の検定

6.3.1 適合度の検定

例題 6.8 (Mendel の法則) 遺伝法則を研究していた Mendel はエンドウ豆の交配実験で、つぎのデータを得た。

	しわ無		しわ有		
種類	黄色 C_1	緑色 C_2	黄色 C_3	緑色 C_4	合計
個数	315	108	101	32	556

彼が提唱している理論にしたがえば、これらの個数の比は 9:3:3:1 のはずであるが、そうなっているか。有意水準 5% で検定せよ。

- (2) 秤については不明だが、抽出したパックの標本不偏分散が $s^2 = 16.0$ g² の場合。

問題 6.4 36 人の学級で全国統一学力テストを実施したところ、平均点は 54.6 点、標本不偏分散は $(8.2 \text{ 点})^2$ だった。全国平均は 51.1 点だという。この学級は平均点に関して優れていると考えられるか。有意水準 5% で検定せよ。

6.2.3 正規母集団に対する母分散 σ^2 の検定

例題 6.5 多数の学生が受験している入学試験の採点で、20 名分の答案を無作為に抽出して平均点 62 点、標本分散 $(12.3 \text{ 点})^2$ を得た。母分散は $(10.0 \text{ 点})^2$ を超えているか。有意水準 5% で検定せよ。

6.2.4 2 つの正規母集団の母分散の差の検定

6.2.5 2 つの正規母集団の母平均 μ の差の検定

例題 6.6 入学生に毎年同じ数学テストを行っている。学生の学力に有意な差はあるだろうか。有意水準 5% で検定せよ。

	人数	平均	不偏分散
昨年	447	58.07	574.1
今年	431	61.15	524.4

問題 6.7 同じクラスで異なる数学テストを行った。テスト 2 の方が難しかったのだろうか。有意水準 5% で検定せよ。

テスト	人数	平均	不偏分散
1	21	65	81
2	26	60	100

6.2.6 相関係数の検定

6.2.7 母比率の検定