付録 A　PC を用いた確率計算実習 [Mathematica]

Mathematica は，Wolfram 社の販売する数式処理ソフトです．グラフ化やシミュレーションまで，今後の学習・研究に役立つことでしょう．

- 情報科学部ではサイトライセンス契約で利用可能となっています．
- 利用方法の詳細は，次のページを参照してください．（講義ページからリンクされています）．
  `https://www.oit.ac.jp/is/shinkai/lecture/mathematica.html`

演習室の PC からの起動方法

- Windows から，普通のソフトウェアと同じように，「プログラム」から「Wolfram Mathematica 」を選択する．（「Mathematica カーネル」ではない．）
- 起動したら，5! と入力し，「shift+ 中央の enter」または「右端の enter」とキーボードを押して，120　と計算されるかどうか確かめよう．

A.1　課題

$\boxed{\text{A.1}}$「徹底攻略　常微分方程式」（真貝著，共立出版，2010 年 8 月）の p204–209 を熟読しながら，すべて実行して確かめよ[*1]．(p210-211 は不要)

$\boxed{\text{A.2}}$（誕生日問題）N 人集まったとき，誕生日が同じ人がいる確率について考える．

(1) 自分と同じ誕生日の人がいる確率を求め，N を横軸としてグラフにせよ．確率が 0.5 を超えるのは，何人以上のときか.

(2) N 人のなかで，同じ誕生日の人が少なくとも 1 組以上いる確率を求め，N を横軸としてグラフにせよ．確率が 0.5 を超えるのは，何人以上のときか.

$\boxed{\text{A.3}}$（サイコロをふる）

(1) 上記ウェブページより，`dice.txt` を参照し，関数 `dice[n_, m_]` を Mathematica で定義せよ[*2]．例えば，5 回サイコロをふる試行を行うには，`dice[1,5]` を実行する．この試行を 10 回繰返すには `dice[10,5]` を実行すればよい.

(2) 20 回サイコロを振り，1– 6 の目について出現回数を記録せよ.

(3) 上記ウェブページより，`dice1.txt` を参照し，関数 `dice1[n_]` を Mathematica で定義せよ．例えば，`dice1[100]` を実行すると，100 回サイコロをふったときの目の出た頻度が表示される.

(4) サイコロをふって出る目の平均値が，試行回数を増やすと 3.5 に近づいていくことを示せ.

$\boxed{\text{A.4}}$（2 項分布）酔歩問題やサイコロ問題で登場する 2 項分布 $B(n,p)$ について.

(1) 2 項分布 $B(n,p)$ で，$X = k$ のときの確率を表示する関数を作成せよ.

(2) 酔歩問題．左右どちらかに 1/2 の確率で歩く酔っぱらいが 10 歩後にいる位置の確率を求めよ.

(3) (2) をグラフにせよ.

[*1] 「微積分学 I」「微分方程式」で行った練習と同じ．該当部分は（学内からなら）web ページで pdf が手に入る.
[*2] 平嶋先生作のスクリプト.

$\boxed{\text{A.5}}$（標準正規分布）

(1) 標準正規分布曲線 $f(z)$ をグラフで示せ．

(2) $f(z)$ の $\alpha \leq z \leq 1000$ の部分の面積を計算する関数を作り，値を標準正規分布表と比較せよ．

(3) 知能指数が 125 以上の人は，何 % いるだろうか．

(4) 知能指数が 200 以上の人は，何 % いるだろうか．

$\boxed{\text{A.6}}$（Buffon の針）平行線が $2h$ の間隔で無数に引かれている平面に，長さ 2ℓ（ただし $\ell < h$）の針を無作為に落とすとき，針が平行線と交わる確率を p とする．p を用いると円周率 π が計算できる．

(1) 上記ウェブページより，`buffon1.txt` を参照し，関数 `buffon1[n_, length_]` を Mathematica で定義せよ．`buffon1[100, 0.7]` と実行せよ．

(2) 講義で解説した例題 1.24 によれば，$\pi = 2\ell/ph$ である．シミュレーションを繰り返すと円周率 π が得られるだろうか．（`buffon1` では，$h = 1$ である）．

A.2 方針とヒント

$\boxed{\text{A.2}}$（誕生日問題）

(1) 2 人なら，相手が同じ誕生日の確率は，$\dfrac{1}{365}$．3 人なら，$\dfrac{1}{365} + \dfrac{1}{365}$．
グラフをプロットするのは，`Plot[....]`

(2) 余事象を考えることで，確率は $1 - \dfrac{{}_{365}\mathrm{P}_N}{365^N}$．これをプロットすればよい．
${}_{365}\mathrm{P}_N$ を関数として組んでみよう．
`f[N_]:=....`

$\boxed{\text{A.3}}$（サイコロをふる）

(1) 発生する乱数は毎回異なるので，何回か試してみよう．

(4) `dice1[ ]` のプログラムを使っても良いが，次のコマンドを用いてグラフにすることもできる．
乱数を 1 から 6 までの範囲で，10 個並べる命令文の例．（ついでにグラフも）

```
t1 = Table[Random[Integer, {1, 6}], {10}]
ListPlot[t1]
```

上記の `Table` に格納された数字の和を求めるためには，

```
Sum[t1[[i]], {i, 1, 10}]
```

付録 B　PC を用いた統計計算実習 [Excel または Mathematica]

データ処理の 1 例として，「父親／母親の身長」と「息子／娘の身長」の相関を調べよう．データは，Excel または Mathematica 形式で，授業ページからリンクして置いてある．

B.1　課題

次のデータは，父親・母親とその成人した子供の身長データ (cm) である．2024–2012 年度の講義中に行ったアンケートから，兄妹あるいは姉弟の組み合わせの家族構成をもつデータ 299 家族分を抽出した．

B.1 (1) 父親データの標本平均，標本分散，標準偏差を求めよ．
(2) 母親データの標本平均，標本分散，標準偏差を求めよ．
(3) 息子データの標本平均，標本分散，標準偏差を求めよ．
(4) 娘データの標本平均，標本分散，標準偏差を求めよ．

B.2 父親・母親・息子・娘　のうちから 2 者を取り出し，相関係数をそれぞれ求めよ．

B.3 (1) 父親・母親・息子・娘　のうちから 2 者を取り出し，回帰直線を求めよ．
(2) 父親・母親の身長に対する息子の身長，および娘の身長について，重回帰分析をせよ．

	x	y	z	w
	父親	母親	息子	娘
1	165	156	168	154
2	169	163	166	155
3	173	159	174	159
4	174	161	173	158
5	175	158	172	162
6	174	150	171	153
7	175	155	160	155
8	171	163	169	164
9	175	158	170	155
10	178	148	165	164
11	163	163	161	152
12	170	155	165	150
13	175	167	171	161
14	172	161	170	164
15	174	161	176	158
16	173	160	175	162
17	175	165	175	165
18	173	152	163	162
19	169	152	167	153
20	180	165	174	165
21	172	150	162	153
22	161	157	171	154
23	168	150	170	153
24	172	162	174	160
25	178	155	172	166
26	165	154	173	163
27	163	158	172	160
28	160	150	170	150
29	177	156	172	156
30	169	150	169	160
31	175	155	168	160
32	170	158	172	162
33	167	158	171	162
34	168	160	175	162
35	170	155	164	152
36	163	155	158	155
37	170	165	178	170
38	168	165	179	168
39	171	164	177	170
40	174	157	168	157
41	171	164	178	159
42	170	150	170	160
43	164	160	180	163
44	175	155	170	157
45	175	158	173	175
46	171	170	172	155
47	155	160	177	154
48	175	150	178	170
49	171	165	160	158
50	165	153	172	154
51	175	156	174	164
52	175	163	179	167
53	168	160	173	166
54	160	165	170	165
55	165	150	167	155
56	170	164	167	165
57	166	153	163	153
58	164	166	173	165
59	161	153	165	149
60	175	155	168	166
61	175	152	168	157
62	160	155	165	160
63	163	154	173	160
64	170	154	167	152
65	175	165	173	160
66	167	153	160	136
67	170	165	169	156
68	172	147	169	145
69	172	168	160	153
70	170	160	171	157
71	174	170	185	165
72	170	161	169	155
73	168	158	168	158
74	172	165	164	157
75	169	162	172	165
76	175	165	171	162
77	169	162	180	163
78	178	159	175	160
79	189	170	179	169
80	175	165	169	165
81	164	166	172	163
82	175	160	178	163
83	155	145	159	150
84	175	164	164	158
85	173	163	171	165
86	165	160	170	165
87	160	150	166	153
88	167	153	172	165
89	175	154	171	150
90	176	150	174	168
91	178	163	173	165
92	180	165	175	165
93	167	155	170	158
94	168	160	163	161
95	165	159	160	155
96	167	165	165	158
97	164	150	176	160
98	170	164	160	160
99	155	165	170	167
100	174	160	152	160
101	160	165	175	162
102	174	153	180	155
103	170	160	170	156
104	171	158	163	150
105	173	156	172	153
106	170	150	178	152
107	168	150	165	150
108	168	154	172	154
109	165	155	176	160
110	175	163	175	159
111	175	150	170	159
112	175	150	178	170
113	165	150	166	160
114	170	170	175	152
115	160	162	171	152
116	170	160	171	185
117	179	170	182	165
118	176	165	174	167
119	176	160	180	160
120	168	148	169	160
121	175	160	175	158
122	165	154	169	148
123	166	160	161	152
124	170	155	166	152
125	180	147	160	155
126	170	146	170	155
127	173	160	175	170
128	165	165	170	150
129	173	162	186	163
130	169	157	173	160
131	174	162	178	160
132	176	156	168	158
133	170	160	170	158
134	180	165	170	170
135	173	154	172	156
136	178	158	172	156
137	170	165	177	160
138	170	160	168	157
139	164	160	171	161
140	176	160	172	165
141	175	160	170	163
142	173	155	160	155
143	178	164	186	166
144	170	165	173	160
145	175	160	174	161
146	170	160	172	165
147	170	150	170	160
148	175	165	176	165
149	169	158	165	155
150	187	164	180	171
151	160	154	166	158
152	173	156	180	156
153	175	163	165	140
154	165	155	170	155
155	170	162	172	160
156	159	160	167	164
157	171	156	166	154
158	174	167	177	158
159	175	160	162	164
160	170	160	163	153
161	173	164	173	165
162	182	162	170	161
163	170	155	176	160
164	167	156	171	157
165	170	169	170	167
166	175	158	180	160
167	178	156	173	163
168	165	158	161	153
169	172	174	170	157
170	172	155	170	160
171	165	155	164	150
172	169	161	172	162
173	164	165	180	160
174	171	163	181	153
175	168	165	170	160
176	159	157	165	160
177	171	156	179	160
178	160	150	165	145
179	183	160	168	164
180	173	163	170	152
181	167	164	173	160
182	178	159	170	160
183	171	155	162	156
184	160	167	168	153
185	173	158	177	160
186	175	160	178	160
187	170	163	173	165
188	170	150	165	155
189	175	160	165	155
190	172	155	175	160
191	181	158	172	170
192	167	158	166	160
193	179	165	178	166
194	165	155	168	160
195	182	155	183	155
196	167	166	177	155
197	183	162	187	160
198	170	165	170	160
199	167	168	170	168
200	170	157	167	160
201	168	162	170	162
202	170	150	170	160
203	164	152	160	156
204	178	155	168	159
205	166	165	171	165
206	168	155	173	149
207	175	158	171	164
208	165	153	159	156
209	172	163	175	160
210	168	156	164	158
211	166	157	178	155
212	173	163	174	163
213	168	157	174	170
214	172	155	176	168
215	175	162	168	168
216	169	155	168	155
217	169	155	159	148
218	165	155	182	155
219	171	168	170	163
220	171	159	169	162
221	172	155	174	164
222	176	155	173	160
223	180	165	184	180
224	165	155	165	150
225	183	165	169	163
226	165	150	161	150
227	167	145	157	149
228	179	162	178	170
229	178	158	176	164
230	165	155	172	157
231	176	158	164	164
232	180	152	169	166
233	170	160	177	160
234	171	156	173	153
235	178	173	175	163
236	185	165	180	170
237	170	155	163	168
238	175	163	181	165
239	164	155	163	161
240	182	165	180	170
241	174	160	168	167
242	168	160	175	160
243	172	160	178	161
244	180	152	173	160
245	167	153	165	159
246	170	162	158	170
247	181	157	167	159
248	168	160	170	161
249	172	154	168	149
250	173	155	172	163
251	173	155	170	140
252	171	165	170	154
253	160	165	169	168
254	158	155	159	156
255	175	159	162	173
256	183	163	188	162
257	170	153	166	155
258	167	160	171	167
259	170	150	170	160
260	170	165	175	165
261	170	158	173	162
262	180	150	180	160
263	170	150	168	160
264	180	140	165	160
265	170	155	160	160
266	168	165	174	158
267	172	162	177	160
268	176	157	166	154
269	173	155	175	163
270	160	165	176	150
271	165	157	173	154
272	168	159	164	160
273	170	151	164	155
274	172	155	175	160
275	180	160	170	170
276	176	153	171	148
277	170	165	166	160
278	172	167	174	154
279	160	160	164	155
280	165	150	163	156
281	168	148	153	150
282	180	170	180	165
283	174	162	173	160
284	176	163	175	160
285	173	150	171	148
286	182	166	174	167
287	172	167	170	172
288	165	165	174	162
289	150	160	166	150
290	173	160	175	163
291	173	162	163	152
292	176	160	167	168
293	161	154	167	155
294	178	152	167	159
295	173	168	179	160
296	168	160	175	160
297	178	160	176	165
298	175	160	173	163
299	172	167	170	172

B.2 ヒント

■平均，積和

n 個のデータ (x_i, y_i), $(i = 1, \cdots, n)$ が与えられているとき，平均と積和は，次のように定義される．

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i, \quad S_{xx} = \sum_i (x_i - \overline{x})^2$$
$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i, \quad S_{xy} = \sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

■相関係数

x と y の対からなる標本 (x_i, y_i) $(i = 1, \cdots, n)$ の**相関係数** r は

$$r = \frac{\displaystyle\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\left[\displaystyle\sum_i (x_i - \overline{x})^2\right]\left[\displaystyle\sum_i (y_i - \overline{y})^2\right]}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \tag{付録 B.1}$$

■最小２乗法による回帰直線解析

n 個のデータ (x_i, y_i), $(i = 1, \cdots, n)$ が与えられているとき，これらのデータ分布を，もっとも良く近似する直線（**回帰直線**）を

$$y(x) = ax + b \tag{付録 B.2}$$

とすると，

$$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \qquad b = \overline{y} - a\overline{x} \tag{付録 B.3}$$

■2 変数に対する回帰方程式（重回帰解析）

データ y を，2 個のデータ (x_1, x_2) を用いて表現する回帰方程式

$$y(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + b \tag{付録 B.4}$$

の係数は次のように求められる．

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1y} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_2y} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix}}, \qquad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1y} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix}}, \qquad b = \overline{y} - a_1\overline{x_1} - a_2\overline{x_2} \tag{付録 B.5}$$

ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$