

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 22 日現在

機関番号：34406

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540293

研究課題名(和文)高次元時空における時空特異点形成条件の解明

研究課題名(英文) Numerical Investigations of Singularities in Higher-Dimensional Space-time

研究代表者

真貝 寿明 (SHINKAI, Hisa-aki)

大阪工業大学・情報科学部・教授

研究者番号：30267405

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円、(間接経費) 1,020,000円

研究成果の概要(和文)：高次元時空における時空特異点やブラックホールの形成条件を数値的手段を用いて、その手法も含めて研究した。重力崩壊のシミュレーションから、(1) 高次元時空では、重力の伝播する自由度が大きくなることから、4次元時空の時よりも崩壊は迅速になり、物質分布形状も球対称に近づくように進むこと、(2) 初期形状が極端に長い場合には、裸の特異点が出現する傾向になるが、ブラックホール地平面の形成条件も高次元では緩められること、(3) リング形状のブラックホールが形成されたり、地平面トポロジーが変化することが確かめられた。また、摂動解析により、(4) ワームホール解は次元によらず不安定であることがわかった。

研究成果の概要(英文)：We investigated formation process of singularities and/or black holes in higher-dimensional space-time using numerical simulations. From the analysis of gravitational collapses, we find (1) the collapse proceeds faster and the collapsing matter's configuration approaches more spherical, since gravity propagates with more freedom in higher-dimensional space-time; (2) if matter is in highly spindle shape, then the time evolution results in the formation of naked singularities, but the critical configuration is looser compared with 4-dimensional cases; (3) the process of black-ring formation together with the topology change of the apparent horizon, for gravitational collapse of ring-shaped matter. From the perturbation analysis, we also find Ellis-type wormhole solutions are unstable in any dimensional space-time.

The research also includes the proposals of formulation of the Einstein equations which is robust against constraint violations during time integrations.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学 素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理

キーワード：一般相対性理論 高次元時空 ブラックホール 時空特異点 拘束条件付発展問題 シミュレーション

1 研究開始当初の背景

「5次元以上の高次元中に我々の4次元空間が膜のように存在する」というブレインモデルが1998年に提案され、これまでに我々が描いていた宇宙描像にまったく新しい可能性が登場した。もともと高次元時空の存在は、超弦理論の展開の中で使われていた数学的な概念であったが、古典的な重力理論の範囲内でも高次元時空の振る舞いを解析する研究が加速する契機となった。

古くから知られている「4次元空間での常識」として、一般相対性理論が描くブラックホールの定常解は軸対称の Kerr 解が唯一である、とする唯一性定理がある。ところが、一般相対性理論を高次元に拡張し、ブラックホールの厳密解の研究が進められると、解として許されるトポロジーが広がることや多様な漸近的時空構造を考え得ることが示されるようになった。高次元時空ではこれまでの知見では予想できない物理学が待ち構えていたのである。

ブレインモデルが許す高次元時空は、5次元以上の次元が0.01mm以下のスケールにコンパクト化された時空である。しかし、LHC 加速器実験での検証可能性が指摘され、物理的な研究対象としてたいへん重要なものになった。

時空特異点・ブラックホールの形成問題は、非線形な重力の特徴が見られる興味深い現象である。本研究を開始した2010年前後は、ブラックホールの厳密解の研究が進んでいても、本質的に興味を持たれるブラックホールの形成条件や安定性・あるいは裸の特異点形成など動力的な研究は、数値的な手段に頼らざるを得ず、敷居が高いこともあって、ほとんど着手されていない状況であった。

我々は、ブレインモデルの提唱された直後に、5次元球対称時空での数値シミュレーションを実現した実績がある¹が、本研究開始時に、本格的なダイナミクスを対象とした時空研究はなされていなかった。そこで、本研究では、5次元時空でのブラックホール形成条件を明らかにすることを目的に、その数値計算手法も含めて取り組む計画を立てた。

2 研究の目的

具体的には、次の2つの研究テーマに取り組んだ。

1. 数値解析に最適な Einstein 方程式の定式化の実証と汎用化

かつて Einstein 方程式の数値シミュレーションでは、安定した時間発展を得ることが困難だった時代が続いた。2000年前後に、申請者らが、Einstein 方程式の発展方程式には拘束条件（ゼロとなる項）を足す自由度が存在し、その補正によって、数値的な安定性が変わる、という事実を発見してから、方法論が急速に発展し、やがて2005年のブレークスルーを迎えることになる。

申請者らは、固有値解析に基づき、代替となる

新しい定式化を複数提案し、すでにモデル計算でそれらの有効性を確認している²が、本研究では、Lagrange 乗数の決定過程に新たなアイデアを取り入れて、重力波伝播などの具体的な問題で検証することを試みた。

2. 高次元時空における時空特異点形成条件の解明

5次元以上の時空では、リング形状のブラックホール解など、多様なトポロジーのブラックホール解が許されることが指摘されているが、安定性や形成条件の多くは不明である。本研究ではまず、物質分布を粒子法で表す数値コードを開発し、1991年に Shapiro-Teukolsky が示した裸の特異点発生の数値計算結果の、高次元での検証を行う。そして、次に、リング形状のブラックホールが動的な過程でできるかどうかの数値実験を行う。

また、異なる特異点の様相を見せることがわかっているワームホールの動的振る舞いについても、高次元時空での安定性を中心に研究を進めた。高次元時空を考える動機の一つには、初期宇宙での重力理論の解明もある。拡張重力理論でのダイナミクスの解明も視野に入れて研究を進めた。まず着手したワームホール時空に対しては、高次元での振る舞いと共に、Gauss-Bonnet 重力理論での時間発展の振る舞いも調べた。

3 研究の方法

2010年度に、5次元時空での初期値を構成するコード開発・ブラックホール地平面 (apparent horizon) を特定するコード開発から着手した。初期値の解系列を求め、時間発展での振る舞いを予想する論文を発表した。次年度には一般相対論的ダイナミクスを追うことのできるコードを開発し、重力崩壊現象について、4次元時空との比較を行った。2012年度には、トラス状に物質を初期配置して重力崩壊現象を試みた。一連の研究は、研究代表者と大阪工業大学大学院生・山田祐太で進めた。

2010年度から、安定な数値計算手法に関して、新たな定式化の研究にも着手した。Fiske によって提案された、運動方程式に拘束条件の2乗の汎関数微分項を加えるアイデアを、一般相対性理論の標準的な時空分解である Arnowitt-Deser-Misner (ADM) 形式と、その改良版である Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) 形式とに順次応用した。一連の研究は、研究代表者と早稲田大学大学院生・土屋拓也、早稲田大学教授・米田元とで進めた。

2012年度からは、高次元時空でのワームホールの動的振る舞いの研究に着手した。将来的に超弦理論を由来にする Gauss-Bonnet 重力理論でのダイナミクス解明のため、基礎方程式の導出や摂動解析と数値コード開発を行った。一連の研究は、研究代表者と大阪工業大学准教授・鳥居隆で進めた。

¹H. Shinkai & T. Shiromizu, Physical Review D 62, 024010 (2000); A. Chamblin, H. S. Reall, H. Shinkai & T. Shiromizu, Physical Review D 63, 064015 (2001).

²H. Shinkai, J. Korean Phys. Soc. 54, 2513 (2009) (arXiv:0805.0068) 他

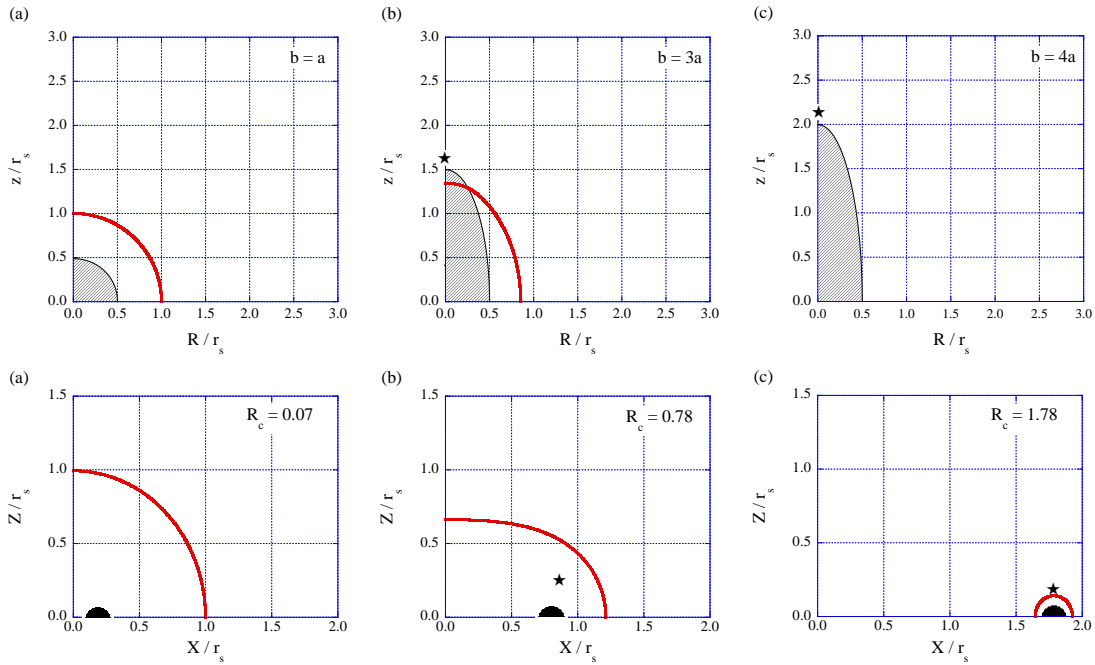


図 1: 物質分布を仮定し、ブラックホール地平面を求めた図。上段：スピンドル形状に物質分布を仮定すると、形状が細長くなる場合にはブラックホールが形成されず、裸の特異点の出現が予想される。下段：リング状に物質分布を仮定すると、分布半径がある程度大きい場合には、リング形状の地平面が出現する。★印は、最も曲率が大きな箇所。 ([6] より)

4 研究成果

4.1 5次元時空中でのブラックホール形成 (初期条件としての解析)

5次元時空中に物質を分布させたとき、どのように時空が歪み、どのような条件でブラックホール地平面 (apparent horizon) が現れるかどうかを、Einstein 方程式の初期値設定問題として明らかにした [6]。

軸対称時空を仮定し、物質をスピンドル形状に分布させると、その物質密度の大きさや分布形状によってブラックホール地平面が現れたり、現れずに裸の特異点となる可能性が確認された (図1 上段)。また、リング状に分布させると、分布の半径が小さいときには全体を囲むような1つのブラックホールが形成されるが、分布半径が大きい時にはいわゆるブラックリングが形成することが確認された (図1 下段)。

ブラックホール形成条件に対して、Nakamura, Shapiro & Teukolsky [Phys. Rev. D. 38, 2972 (1988)] の解析を拡張し、「フープ仮説」の5次元版を検証した。その結果、(a) 半径を基準とするフープではなく、表面積を基準とするフープであれば5次元ブラックホール形成の判定ができること、(b) ブラックリング形成には、フープ仮説が適用できないこと、がわかった。

4.2 5次元時空中での時空特異点形成

5次元軸対称時空中でのダイナミクスを追う数値コードを作成し、図1で得られた時空を時間発展させて、予想が正しいかどうかを検証した。4次元の場合には、Shapiro & Teukolsky [Phys. Rev. Lett. 66, 994 (1991)] によって、裸の特異点が形成した、という報告がある。我々は彼らの結果を再現するとともに、次元の違いによる比較を行った。

高次元になると、重力の伝播する自由度が大きくなることから、(a) 重力崩壊はより迅速に、(b) より球対称形状に進むことがわかった。また、スピンドル形状が極端に長い場合には、ブラックホール地平面が形成せず、(c) 裸の特異点が出る傾向も確かめられたが、(d) 5次元時空中では地平面の形成条件も4次元よりもゆるいものであることが分かった [5]。

4.3 5次元時空中でのブラックリング形成

5次元軸対称時空中で物質をリング形状に配置し、時間発展を行った。実際にリング状の地平面が出現するかどうかは焦点であったが、物質が回転をもたない場合、トーラス形状の地平面 (ブラックリング) が形成され、その後球状の地平面に変化する「地平面のトポロジー・チェンジ」が確認された (図2)。

また、物質が回転エネルギーを持つ場合 (双方向回転の場合) を含めて扱えるように計算コードを改

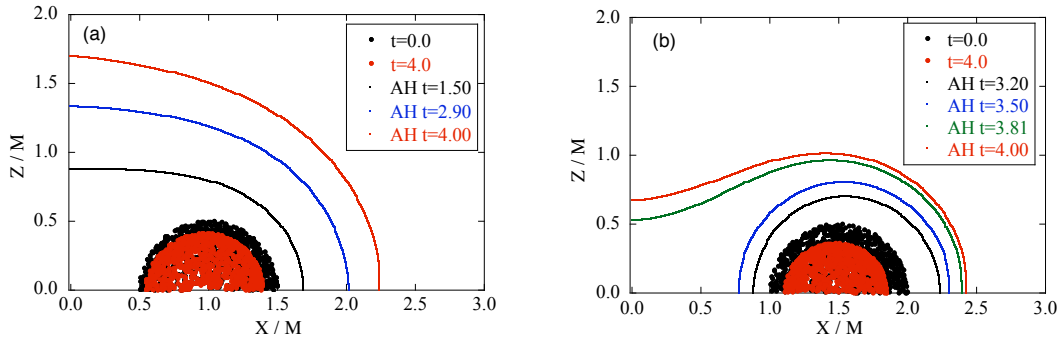


図 2: リング状に分布した物質の重力崩壊によるブラックホール地平面の形状変化の様子. 右図は, 物質分布の半径がある程度大きいと, ブラック・リングが形成されるが, 重力崩壊が一層進むと全体を覆うような共通地平面が出現する例. ([2] より).

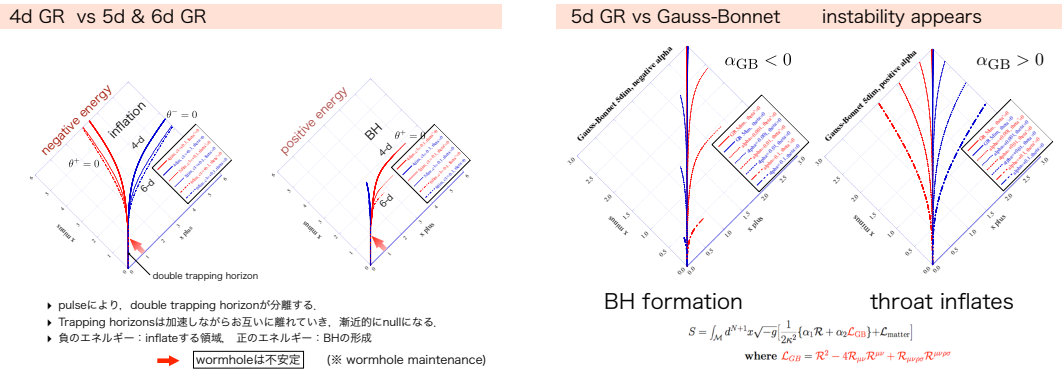


図 3: (左) ワームホールの喉に, 負のエネルギーを加えると, 不安定性によって, 拡大していく様子. Dual-null 座標による計算で, 上向きが時間の進む方向. 実線が 4 次元, 点線が 5 次元, 破線が 6 次元時空の場合. (右) Gauss-Bonnet 修正重力理論によるワームホールの喉のふるまい. 結合定数の正負によって不安定性が異なる方向に進む. 通常考えられる正の結合定数ならば, 特異点形成が避けられるような発展 (喉の拡大) を起こす.

良いところ, リング形状の地平面のまま, ほぼ定常に保たれる場合が発見された. これらの結果は予想の範囲内ではあるが, 知られている厳密解と回転則こそ異なるが, ブラックリング解が形成できたことになり, これまでに得られていない結果でもある. ブラックリング解の安定性を解明するためには, より一層長時間積分を行う必要があり, 座標条件等の工夫が必要であることがわかった [2].

4.4 数値解析に適した Einstein 方程式の定式化

安定な数値計算手法に関して, 新たな定式化を行い, その有効性を確認した. Fiske [Phys. Rev. D 69, 047501 (2004)] によって提案された, 運動方程式に拘束条件の 2 乗の汎関数微分項を加えるアイデアを, Einstein 方程式の時間発展方法としてもっとも基本的な ADM 形式に適用した [4]. さらに, 現在世界的に標準となっている BSSN 形式の方程式にも適用した [3]. 我々は, Lagrange 乗数の自由度を用いて拘束面をアトラクターとする定式化について, 一連の

研究を展開しているが, その 1 つとして, 利点や難点を明らかにした.

4.5 N 次元時空でのワームホールの安定性

ワームホールは, 理論上の天体であるが, その動的振る舞いについては比較的新しいトピックである. 4 次元 Einstein 時空でのワームホール (Ellis 解) は不安定であり, エネルギー的なバランスが崩れることによってブラックホールやスロート膨張する³. 我々はこの研究を高次元に拡張することを試みた.

まず, 一般 N 次元空間で Ellis 型のワームホール解を導いた. 次に摂動計算によって, 必ず不安定モードが存在することを明らかにした [1]. さらに, 光座標を用いた数値コードを用いて時間発展を行い, 予想通りに不安定であることを示した. また, この解を Gauss-Bonnet 重力理論の補正項を入れた発展方程式で時間発展させ, 補正項の影響を明らかにした (図 3). これらの結果は, 現在論文執筆中である.

³H. Shinkai and S. A. Hayward, Phys. Rev. D 66, 044005 (2002).

5 主な発表論文等

5.1 雑誌論文 (計6件)

- [1] T. Torii, & H. Shinkai, Wormholes in higher dimensional space-time: Exact solutions and their linear stability analysis, *Physical Review D* 88 (2013) 064027 (6 pages) 査読あり
DOI: 10.1103/PhysRevD.88.064027
- [2] Y. Yamada, & H. Shinkai, Numerical Investigations of Five-dimensional Gravitational Collapses, *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* 7 (2012) 148-157 査読あり
DOI: 10.1142/S2010194512004217
- [3] T. Tsuchiya, G. Yoneda, & H. Shinkai, Constraint propagation of C^2 -adjusted formulation II – Another recipe for robust BSSN evolution system –, *Physical Review D* 85 (2012) 044018 (12 pages) 査読あり
DOI: 10.1103/PhysRevD.85.044018
- [4] T. Tsuchiya, G. Yoneda, & H. Shinkai, Constraint propagation of C^2 -adjusted formulation – Another recipe for robust ADM evolution system –, *Physical Review D* 83 (2011) 064032 (10 pages) 査読あり
DOI: 10.1103/PhysRevD.83.064032
- [5] Y. Yamada, & H. Shinkai, Formation of naked singularities in five-dimensional space-time, *Physical Review D* 83 (2011) 064006 (5 pages) 査読あり
DOI: 10.1103/PhysRevD.83.064006
- [6] Y. Yamada & H. Shinkai, Black objects and hoop conjecture in five-dimensional space-time, *Class. Quantum Grav.* 27 (2010) 045012 (15 pages) 査読あり
DOI: 10.1088/0264-9381/27/4/045012

5.2 学会発表 (計24件)

1. 鳥居隆 真貝寿明, 高次元ワームホールの安定性: 線形摂動と時間発展数値解析
日本物理学会, 東海大学, 2014年3月
2. 真貝寿明 鳥居隆, ワームホールの不安定性
日本天文学会, 国際基督教大学, 2014年3月
3. 真貝寿明 鳥居隆, Wormholes in higher-dimensional gravity: Effects of Gauss-Bonnet gravity
第26回理論懇シンポジウム, 東京大学, 2013年12月
4. T. Torii & H. Shinkai, Wormhole solutions in higher dimensional space-time and their linear stability analysis (poster)
The 23th Workshop on General Relativity and Gravitation (JGRG23), [Hirosaki U., Japan, November 2013]
5. H. Shinkai & T. Torii, Wormholes in higher dimensional space-time: Dynamics (poster)
The 23th Workshop on General Relativity and Gravitation (JGRG23), [Hirosaki U., Japan, November 2013]
6. H. Shinkai & T. Torii, Wormhole evolutions in higher-dimensional gravity –Effects of Gauss-Bonnet gravity terms (poster)
The 20th International Conference on General Relativity and Gravitation (GR20), [Warsaw, Poland, July 2013]
7. 真貝寿明 鳥居隆, Wormhole dynamics in Gauss-Bonnet gravity
日本物理学会, 広島大学, 2013年3月
8. H. Shinkai & T. Torii, Wormhole dynamics in Gauss-Bonnet gravity (poster)
RESCEU Symposium on General Relativity and Gravitation (JGRG22), [Tokyo U., Japan, November 2012]
9. H. Shinkai, Wormhole dynamics (invited talk)
The workshop on theories and possibilities of observations of wormholes, [Rikkyo U., Japan, October 2012]
10. Y. Yamada & H. Shinkai, Numerical Study of 5-dimensional Gravitational Collapses (20min talk)
The 13th Marcel Grossmann Meeting, [Stockholm, Sweden, July 2012]
11. 山田祐太 真貝寿明, 5次元重力崩壊: 回転対称性と角運動量の効果
日本物理学会, 弘前大学, 2012年3月
12. 山田祐太 真貝寿明, Gravitational collapse in five-dimensional space-time
The 2nd AICS International Symposium, 理化学研究所神戸, 2012年3月
13. 山田祐太 真貝寿明, 5次元ブラックリングとフープ仮説
第24回理論懇シンポジウム, 国立天文台, 2011年11月
14. Y. Yamada & H. Shinkai, Gravitational collapse of ring objects in five-dimensional space-time (poster)
The 21th Workshop on General Relativity and Gravitation (JGRG21), [Tohoku U., Japan, September 2011]
15. T. Tsuchiya, G. Yoneda & H. Shinkai, Constraint propagation and constraint-damping in the C^2 -adjusted formulation (15min talk)
The 21th Workshop on General Relativity and Gravitation (JGRG21), [Tohoku U., Japan, September 2011]

16. 山田祐太 真貝寿明, Black ring and hoop conjecture
日本物理学会, 弘前大学, 2011年9月
17. 山田祐太 真貝寿明, Gravitational collapses and naked singularity in 5-dimensional space-time
日本物理学会, 新潟大学, 2011年3月 (開催中止)
18. H. Shinkai, Gravitational Collapse in Five-dimensional Space-time (20min talk)
The 2011 Shanghai Asia-Pacific school on Gravitation, [Shanghai, China, February 2011]
19. Y. Yamada & H. Shinkai, Gravitational Collapse in Five-dimensional Space-time (poster)
The 20th Workshop on General Relativity and Gravitation (JGRG20), [Kyoto, Japan, September 2010]
20. Y. Yamada & H. Shinkai, Gravitational Collapse in Five-dimensional Space-time (poster)
The 2010 Cosmo/CosPA International Workshop (Cosmo/CosPA 2010), [Tokyo, Japan, September 2010]
21. 山田祐太 真貝寿明, Numerical analysis of black-ring in 5-dimensional space-time (II)
日本物理学会, 九州工業大学, 2010年9月
22. 土屋拓也 米田元 真貝寿明, Constraint propagation of C^2 -adjusted BSSN Equations
日本応用数理学会, 明治大学, 2010年9月
23. H. Shinkai & Y. Yamada, Black Objects and Hoop Conjecture in Five-dimensional Space-time (20min talk)
The 19th International Conference on General Relativity and Gravitation, [Mexico City, Mexico, July 2010]
24. H. Shinkai, T. Tsuchiya & G. Yoneda, Constraint Propagation of C^2 -adjusted Equations — Another Recipe for Robust Evolution Systems — (poster)
The 19th International Conference on General Relativity and Gravitation, [Mexico City, Mexico, July 2010]

5.3 ホームページ

<http://www.is.oit.ac.jp/~shinkai/research/>

6 研究組織

- (1) 研究代表者
真貝 寿明 (SHINKAI Hisa-aki)
大阪工業大学 情報科学部・教授
研究者番号：30267405
- (2) 研究分担者
鳥居 隆 (TORII Takashi)
大阪工業大学 工学部・准教授
研究者番号：00360199
(H22-H23：連携研究者)
- (3) 連携研究者
米田 元 (YONEDA Gen)
早稲田大学大学院・基幹理工学研究科・教授
研究者番号：90277848