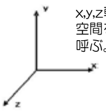
宇宙物理研究室

「特殊相対性理論」の解説（2）

特殊相対性理論は、電磁気学の基本式（Maxwell 方程式）のもつ Lorentz 変換不変性と，Newton 力学のもつ Galilei 変換不変性との不整合問題を解決する手段として提案された．当時は，光を伝える媒体としてエーテルの存在が仮定されており，そのために生じる理論と実験の矛盾があちこちに出ていた．Einstein は，この問題を原理的な面から考え直し，２つの簡単な仮定によって，すべてが説明できることを示した．すなわち，『特殊相対性原理』（物理法則は，すべての慣性系で同一である）と，『光速度一定の原理』（真空中の光の速度は，すべての慣性系で等しい）である．その帰結として、「時間と空間」は不可分であることが導かれる．

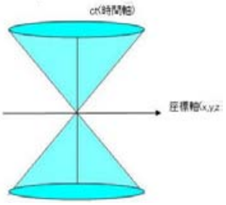
井口

4．ミンコフスキー時空



x,y,z軸からなる空間を３次元空間呼ぶ。

下図のように時間と空間を示す。



これに、時間という概念を取り入れたx,y,z,ct(時間)を４次元空間と呼び、これをミンコフスキー時空という。

挽木

5　相対論的な速度の合成

電車の速度：　V_1

電車内での歩行者の速度：　$V_2=\frac{x'}{t'}$

地面から観測した電車内での歩行者が進んだ距離：　$x=\frac{x'+V_1*t'}{\sqrt{1-(V_1/c)^2}}$

地面から見た歩行者が歩いた時間：　$t=\frac{t'+(V_1/c^2)x'}{\sqrt{1-(V_1/c)^2}}$

速度の合成：

$$V\quad\frac{x}{t}=\frac{x'+V_1*t'}{t'+(V_1/c^2)x'}=\frac{(x'/t')+V_1}{1+(V_1/c^2)(x'/t')}=\frac{V_2+V_1}{1+V_1*V_2/c^2}$$

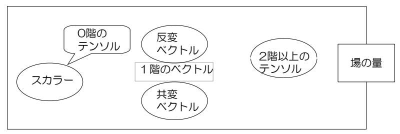
井口・江本

6.場の量とは？

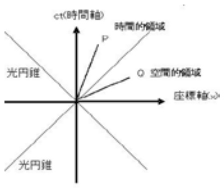
・一つの慣性系で定義されている物理量が別の慣性系でどのように表現できるかはっきりさせなければならない。

・場の量(物理量)とは、質量や長さ、時間など客観的に測定できる量である。

・場の量は、ローレンツ変換に対する変換性から、スカラー反変ベクトル、共変ベクトル、テンソルに分類される。



時間的領域・空間的領域



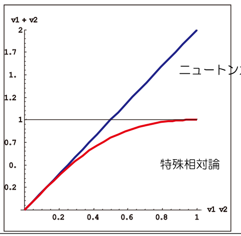
原点から出発する、いかな物理的な情報も、光の速度を超えることは考えられないので、光円錐の外部に伝わることはない。

横のx軸は座標空間をあらわす。また、原点を現在として、０＜ctは未来、０＞ctは過去を表す。

速度の合成の比較

ニュートン力学における速度の合成式

$$V=V_1+V_2$$



特殊相対論における速度の合成式

$$V=\frac{V_1+V_2}{1+V_1*V_2/c^2}$$

アインシュタインの和の規則

相対論を数学的に整備するための方法を挙げる。

座標を(ct,x,y,z)と書く代わりに、
$x^0=ct$
$x^1=x$
$x^2=y$
$x^3=z$
と、定義したx^i　を用いる。

$$\eta_{ij}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

と、定義する。

ミンコフスキー空間での世界長さの2乗は、

$$s'^2=-(ct')^2+x'^2+y'^2+z'^2$$

と、表されるが、この座標表示では、

$$s^2=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\eta_{ij}x^i x^j$$

となる。ここでη_{ij}は、ミンコフスキー空間の計量テンソルで、

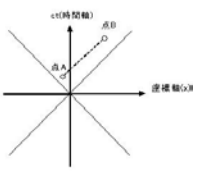
また、Σと度々書くのは面倒なので、数式の中の項に同じ添字があった場合は０～３までの和をとるものとする。

$$\boxed{s^2=\eta_{ij}x^i x^j}$$

と、表される。

この省略記法を、アインシュタインの和の規則と呼ぶ。

世界長さとローレンツ変換



このように、点A (ct_1,x_1,y_1,z_1) と点B (ct_2,x_2,y_2,z_2) が定義された時、二つの点の距離は、

$$s^2=-(ct_2-ct_1)^2+(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

とする。このsを世界間隔と呼ぶ。
原点と世界点との距離は、

$$s'^2=-(ct')^2+x'^2+y'^2+z'^2$$

となり、これを世界長さと呼ぶ。

ｘ系の世界点(ct,x,y,z)が、ローレンツ変換によって、x’系の世界点(ct’,x’,y’,z’)に変換されたとすると、x’系での世界長さは、

$$s'^2=-(ct')^2+x'^2+y'^2+z'^2$$

となる。これを、ローレンツ変換の式に代入してみると・・・・

$$s'^2=s^2$$

となる。これは、３次元空間で回転座標変換によって、原点から特定の点までの距離が変化しないことと類似している。
角度θを、

$$\frac{v}{c}=\tanh\theta$$

と定義すれば、ローレンツ変換の式を、

$$\begin{bmatrix}ct'\\x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\theta&-\sinh\theta&0&0\\-\sinh\theta&\cosh\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ct\\x\\y\\z\end{bmatrix}$$

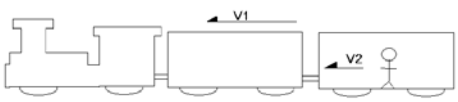
と、書き換えることができる。

このようにローレンツ変換は、「ミンコフスキー空間」における距離(世界長さ)を不変に保つとい幾何学的に美しい意味をもってる。

比較結果

・　殊相対論における速度の合成式を見ると光の速さを超えることはない。

・速度が光速に近づくときだけ、特殊相対論の効果が顕著になる。



挽木

テンソル

・反変テンソル　　２つの反変ベクトルの成分の積

$$T^{ij}(x)=A^i(x)\cdot B^j(x)=\begin{pmatrix}A^0B^0&A^0B^1&A^0B^2&A^0B^3\\A^1B^0&A^1B^1&A^1B^2&A^1B^3\\A^2B^0&A^2B^1&A^2B^2&A^2B^3\\A^3B^0&A^3B^1&A^3B^2&A^3B^3\end{pmatrix}$$

座標変換は

$$T'^{ij}(x')=\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}T^{kl}(x)$$

・共変テンソル　　２つの共変ベクトルの成分の積

$$T'_{ij}(x')=\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}T_{kl}(x)$$

・高階テンソル

$U^{ij}_{kl}=S^{ij}T_{kl}, U^i_{jkl}=S^i_jT_{kl}$ ← テンソルを組み合わせると作れる。

この添え字２つもつ T^{ij} を２階のテンソルという。

（０階のテンソル→スカラ　－　　１階のテンソル→ ベクトル　）

縮約

・「ベクトルの大きさ」の概念を拡張したもの、「和」を取ることが添え字を減らすことに対応する。

$$B^{jk\cdots}{}_{pr\cdots}=\sum_{i=0}^{3}A^{ijk\cdots}{}_{pir\cdots}$$

は縮約の一例でテンソル $A^{ijk\cdots}_{pqr\cdots}$ の共変成分（下添え字）の２番目のqをiに置き換え縮約したもの。

・反変ベクトルと共変ベクトルよりスカラー量を作った時、この積をスカラー積という。

$$C(x)=A(x)B_j(x)$$

ベクトル長さとは $(A)^2=A\,A=\eta_{j}A\,A^j=\eta^{j}A\,A_j$　である。

http://www.is.oit.ac.jp/~shinkai/

2006/11/3 北山祭