宇宙物理研究室

「特殊相対性理論」の解説 (3)

井口・江本

スカラー

・ローレンツ変換は１次変換であるので、

$$x'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} x^j \qquad L^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j}$$

と、表される。

x系の座標点に定義された物理量 $\phi(x^1、x^2、x^3、x^4)$ があった時、$(x^1、x^2、x^3、x^4)$と、書くのが面倒なので、$\phi(x)$と記すことにする。
ローレンツ変換により、x系がx’ 系へ移ったとき、

$$\phi'(x')=\phi(x)$$

ならば、この物理量をスカラーと呼ぶ。

スカラーとは向きを持たない物理量である。

ベクトル

反変ベクトル

$$U'^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} U^j(x)$$

このように変換されるベクトルを、反変ベクトルという。

・反変ベクトルの座標の添字は右肩に書くと約束する。

・この変換行列はローレンツ変換L^i_jそのものである。

共変ベクトル

$$V_j'(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} V_i(x)$$

このように変換されるベクトルを、共変ベクトルという。

・共変ベクトルの添字は右下に書くと約束する。

・スカラー勾配ベクトルは、共変ベクトルである。

$\bar{L}^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$ は、L^i_j の逆行列である。
また、逆変換なので、L^i_j の表式の速度をvを-vに置き換えたものである。

井口

縮約

・「ベクトルの大きさ」の概念を拡張したもの、「和」を取ることが添え字を減らすことに対応する。

$$B^{jk\cdots}{}_{pr\cdots} = \sum_{i=0}^{3} A^{ijk\cdots}{}_{pir\cdots}$$

は縮約の一例でテンソル A^{ijk}_{pqr} の共変成分（下添え字）の２番のqをiに置き換え縮約したもの。

・反変ベクトルと共変ベクトルよりスカラー量を作った時、この積をスカラー積という。

$$C(x) = A^j(x)B_j(x)$$

ベクトル長さとは $(A)^2 = A\,A = \eta_{ij} A^i A^j = \eta^{ij} A_i A_j$ である。

犬束

7. 運動方程式を共変形式に書き直す

ニュートンの運動方程式が特殊相対性原理（慣性座標系間の座標変換はローレンツ変換に対して不変）を満たすように、共変形式に書き直す。

※共変形式とは物理量が一目でスカラーなのか、ベクトルなのかテンソルなのかがわかる形式のこと

⇒座標系の取り方に依らない定式化

時間・空間座標を x^μと置くとき、それを時間微分すると、速度、

$$v^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{dt}$$

が得られる。しかしこれでは、時間 t を特別扱いしてしまう。そこで、固有時間 τ を用いて、4元速度を定義する。

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

（固有時間はローレンツ変換に対して不変なスカラー量だから）

犬束

次に4元運動量

$$p^i = m u^i$$

を考えると、運動方程式は

$$\boxed{\frac{dp^i}{d\tau} = f^i}$$

と書け、共変な形式になる。

物理学の法則が相対性原理を満たすためには、あらゆる力を4元ベクトルで表せれば問題ない

犬束

静止質量 $E=mc^2$

4元運動量の2乗の長さは、

$$p^i p_i = m^2 u^i u_i = -m^2 c^2 = \text{（一定）}$$

p^0 成分はエネルギーの意味をもち、

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \cdots$$

$$\boxed{E = mc^2}$$

これは速度がゼロでも静止質量に光速の2乗をかけたものが、エネルギーに相当することを示している。

犬束

犬束

8. 等価原理

・局所的に重力を消し去り慣性系にすることができる

・あらゆる物質の重力質量と慣性質量が等しい

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} + g = -g + g = 0$$

犬束

慣性質量と重力質量

$$m_I \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m_G \cdot g$$

↓ 慣性質量 ↓ 「加速のされにくさ」

↓ 重力質量 ↓ 「重力の大きさとして計算される質量」

重力質量と慣性質量は比例関係にあり、ここでは便宜的にこの比例定数を１と定義するのが普通である。

$$m_G = m_I$$

犬束

エトベシュの実験（1886～）

重力質量と慣性質量は便宜上のため等しいものとし、比率を１と定義したが、実際どうなのかを検証した。

彼らは地球が自転しているため、遠心力も働くことを利用して実験を行った。

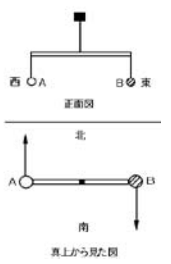
犬束

右図のような道具を用いて実験をした

・A、Bの重力質量は同じ
→遠心力は同じ。

・A、Bの慣性質量は異なる
→生じる力が異なる。

⇒ 回転が生じる。



犬束

エトベシュの実験結果

これらの考えでエトベシュらは重力の異方向性を避けるために、障害物のない冬の凍った湖の中心で実験を行った。
その結果、重力質量と慣性質量の比は物質によって異なることがわかった。

結果

$$\frac{\triangle(m_G/m_I)}{m_G/m_I} \leq 10^{-8}$$

となり

$$m_G = m_I$$

が言える。

犬束

Einstein は，すべての座標系で同じ形式で書ける「共変的な」物理法則を求めた．
「テンソル形式」を用いることにより、運動方程式が共変的に表され、その結果、静止エネルギーの概念 E=mc2 が登場した．こうして完成した特殊相対性理論だが，加速度運動をする座標系（重力の働く物理系）に対しては説明ができていなかった．
「重力の効果は、局所的に取り去ることができる」（等価原理）に気づいた Einstein は、その後 10 年余りをかけて，「重力の効果は時空のゆがみである」とする一般相対性理論に到達することになる．

http://www.is.oit.ac.jp/~shinkai/

2006/11/3 北山祭