宇宙物理・数理科学研究室　　Astrophysics & Mathematical Sciences

多面体への投影ツールとその応用

卒業研究中間報告　B10-079　林圭祐

多面体への投影ツールの作成とその応用

大阪工業大学 情報科学部 情報システム学科
学籍番号 B10-079 氏名 林 圭祐

概要

球体表面のデータを正多面体に投影するツールを作成した。データの例として地球の海岸線データを使用し、正多面体に投影した地球儀を作成した。

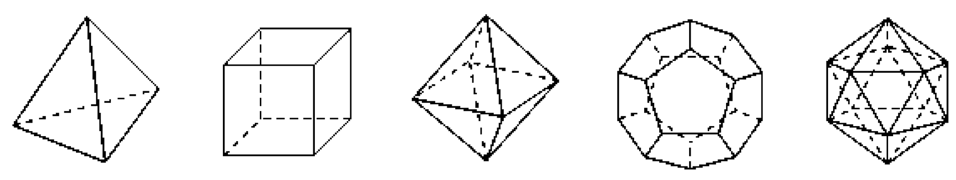
正多面体の各平面へ投射する手順は次のようにした。

・平面への投射
・投影面の変形

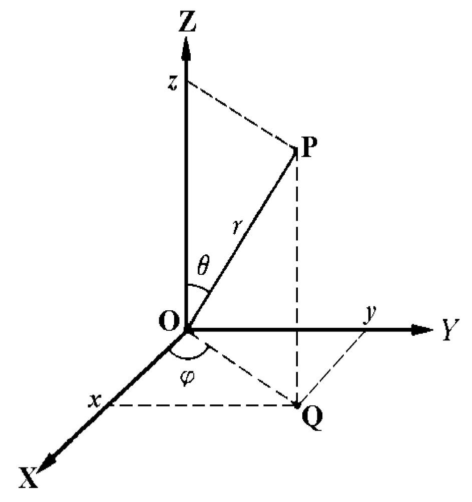
正多面体とは

・すべての面が同一の正多角形で構成されており、且つすべての頂点において接する面の数が等しい凸多面体
・正多面体には正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類がある

※正多面体が5種類しかないことは簡単に導くことができる



球座標変換



使用している海岸データは、経度と緯度で表わされており扱いにくいため、xyzの3次元座標に置き換える。左図ではz軸が自転軸方向(正が北極)でφが経度、θが緯度にあたる。xyz軸への座標変換の式は次のようになる。

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

この変換は球座標変換と呼ばれる。

平面への投射

3点A(Ax,Ay,Az)、B(Bx,By,Bz)、C(Cx,Cy,Cz)を含む平面の式は以下のように表される

$$a = (B_y - A_y)(C_z - A_z) - (C_y - A_y)(B_z - A_z)$$
$$b = (B_z - A_z)(C_x - A_x) - (C_z - A_z)(B_x - A_x)$$
$$c = (B_x - A_x)(C_y - A_y) - (C_x - A_x)(B_y - A_y)$$
$$d = -(aA_x + bA_y + cA_z)$$
$$ax + by + cz + d = 0$$

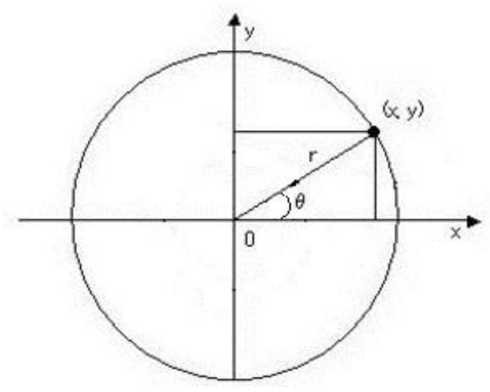
正六面体は$x = R, y = -R, z = R$など面の式は単純になる。
正八面体は$R^2x + R^2y + R^2z - R^3 = 0$など面の式は比較的単純になる。
正四面体や、正十二面体などの面の式は複雑になる。
原点と投影したい点D(α,β,γ)とを結ぶ式は以下である。

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

この式と面の式の交点が投影する座標になる。

投影面の変形　極座標変換

球体を平面で切った際の断面は円形になる。そのため、球を多面体に近似するためには、平面に投影した後、三角形などに変換する必要がある。

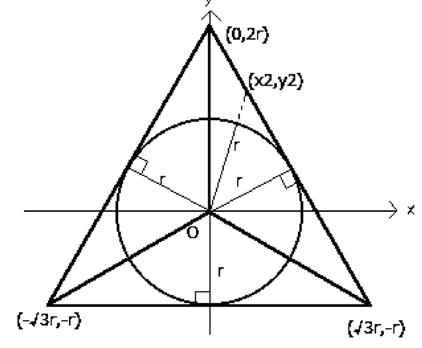


断面は、断面と投影する球体の交点を原点としたxy軸の2次元となる。原点と点の距離rを計算し、xyの値からθを計算する。
このrθ座標系は極座標と呼ばれ、計算式は以下のようになる。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \cos^{-1}\frac{x}{r}$$
$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

投影面の変形　正三角形

rθであらわされた円周上の点を、その円が内接する正三角形に変換する式は次のようになる。

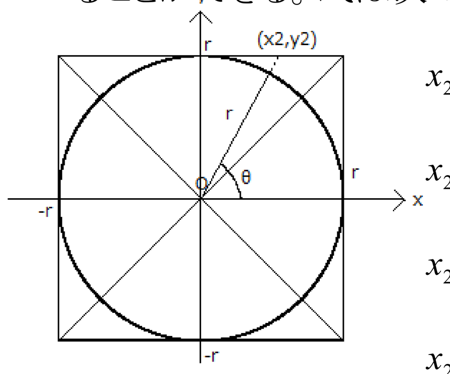


$$x_2 = \frac{2r}{\tan\theta + \sqrt{3}}, y_2 = \frac{2r}{1 + \sqrt{3}\cot\theta} \quad (-\frac{\pi}{6} \le \theta < \frac{\pi}{2})$$
$$x_2 = \frac{2r}{\tan\theta - \sqrt{3}}, y_2 = \frac{2r}{1 - \sqrt{3}\cot\theta} \quad (-\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{7\pi}{6})$$
$$x_2 = -r\cot\theta, y_2 = -r \quad (-\frac{5\pi}{6} \le \theta < -\frac{\pi}{6})$$

正三角形の各辺と、原点と円周上の点を結んだ直線の交点を表している。

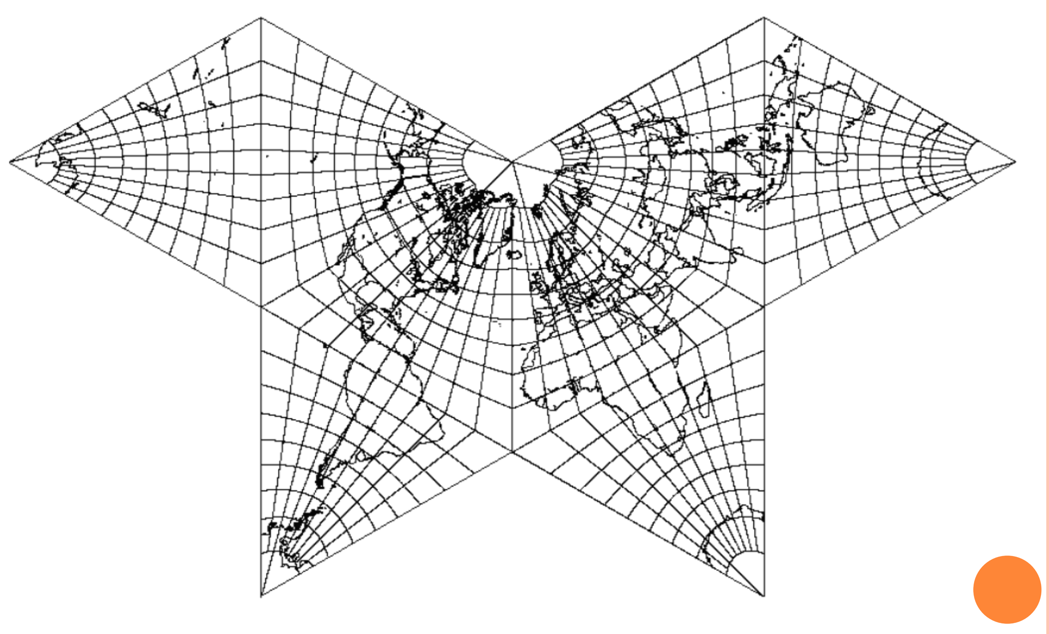
投影面の変形　正方形

正三角形への変換とおなじ考え方で、正方形にも変換することができる。式は次のようになる。

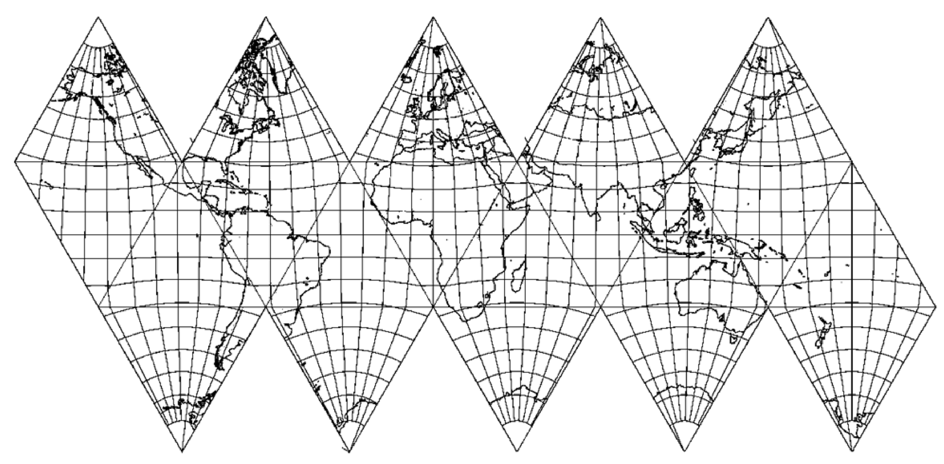


$$x_2 = r, y_2 = r\tan\theta \quad (-\frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{\pi}{4})$$
$$x_2 = r\cot\theta, y_2 = r \quad (\frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{3\pi}{4})$$
$$x_2 = -r, y_2 = -r\tan\theta \quad (\frac{3\pi}{4} \le \theta < -\frac{5\pi}{4})$$
$$x_2 = -r\cot\theta, y_2 = -r \quad (-\frac{3\pi}{4} \le \theta < -\frac{\pi}{4})$$

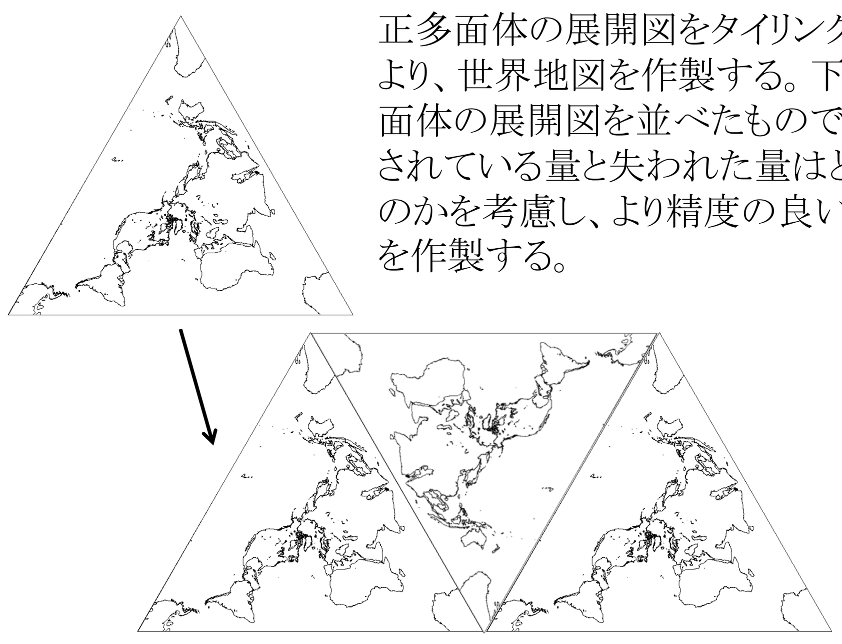
正八面体の展開図



正二十面体の展開図



今後の方針



正多面体の展開図をタイリングすることにより、世界地図を作製する。下図は正四面体の展開図を並べたものである。保存されている量と失われた量はどのようなものかを考慮し、より精度の良い世界地図を作製する。

世界地図の作成

正四面体は展開図に切り開く際、鋏の入れ方により長方形に開くこともできる。1枚の世界地図としてみることもできるが、タイリングするにはいくつか課題が残る。