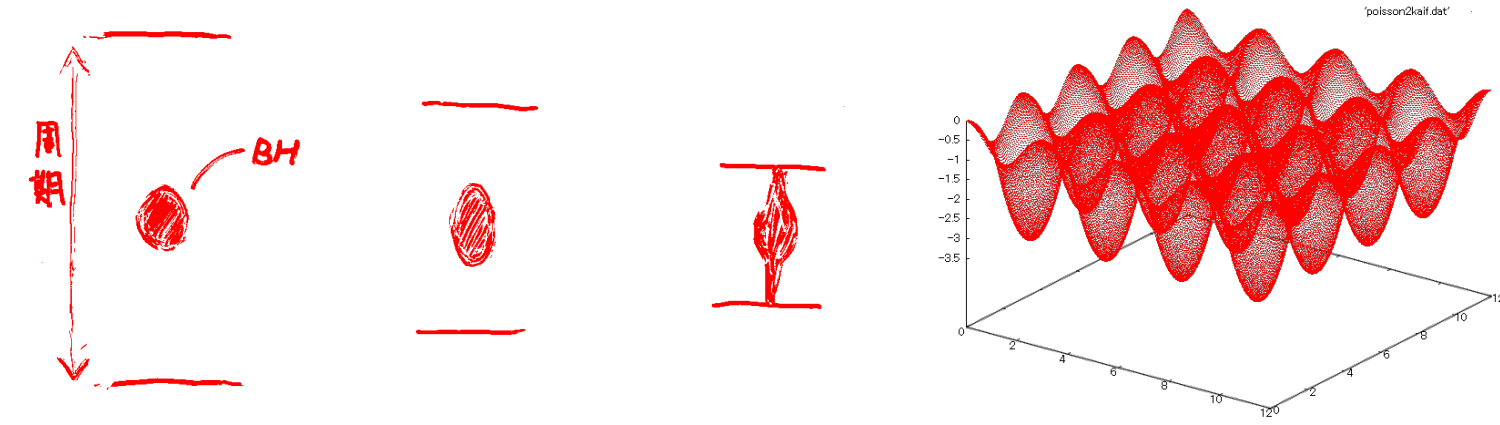


格子状にならべたブラックホールの重力による変形

卒業研究中間報告 C10-094 森本恭将

01 何をするか

- ふつう我々が想像するBHの形状は球対称(または回転して軸対称)だろう。
- BH同士が接近すれば互いの重力で変形し、最終的に合体することが予想される。周期境界を設定して数値計算を行い、BHが変形する様子を見られたら面白いだろう。



02 「格子状に～」の背景

- 理論物理学において、重力等に関する理論の説明のために、通常認識できる空間3次元+時間1次元以外の余剰次元(コンパクト化された次元)が導入されている。
- 余剰次元は短く閉じているとされるため、自らの重力の影響を受けて変形する異なるBHが存在できる(例:5次元時空におけるBlack String)。
- このような高次元BHは、見方を変えれば無限に長い線上(余剰次元を2次元とすれば無限に広い平面上)に等間隔に配置された物体である。すなわち、「格子状にならべた」BH。



03 必要な計算

- Einsteinの重力場の方程式を解く。これは物質分布等を与えて、取り扱う時空の計量(距離や角度を定義し、時空の歪み具合を表現するもの)を決めるということ。

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$$

- 曲がった時空における運動方程式である測地線方程式を解き、光の軌跡を計算する。これにより、BHの形成を確認し、その表面を特定する。 Γ_{ij}^k (Christoffel記号)は計量から計算される接続係数である。これがすべてゼロ、すなわち時空が曲がっていない場合に測地線の式はNewtonの運動方程式と一致する。

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial \lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \lambda} \frac{\partial x^j}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

04 計量

- 2点間の微小距離(の2乗) ds^2 は平らな3次元空間であれば、 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ のようになる。
- 極座標では $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$
- Minkowski空間では $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$
- ここで微小距離 ds^2 を $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ のように表す行列 g_{ij} を導入すれば、それは距離を決める基本となるものであり、これを計量(計量テンソル、metric tensor)という。 ds^2 は座標変換に対して不変であり、2点間の距離を各座標系で表すための「係数」である計量は空間(時空)の構造を特徴付ける。

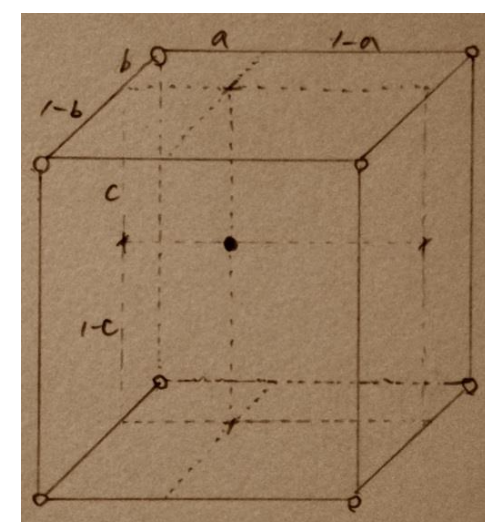
05 Newton重力の場合

- 前段階として、境界条件の影響をNewtonの重力場において調べる。重力場のポテンシャル ϕ は質量密度 ρ を用いて、次のようなPoisson方程式で表現される。

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 4\pi G\rho$$

- ポテンシャルの勾配が重力となる。以降は相対論的な重力場を考えることになるが、重力場が弱く運動の速度が光速より遅いという極限においては、Newtonの重力方程式に一致する。
- 質点1つの簡単な場合を考えると、重力ポテンシャル ϕ と脱出速度 v は次のようになる。

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

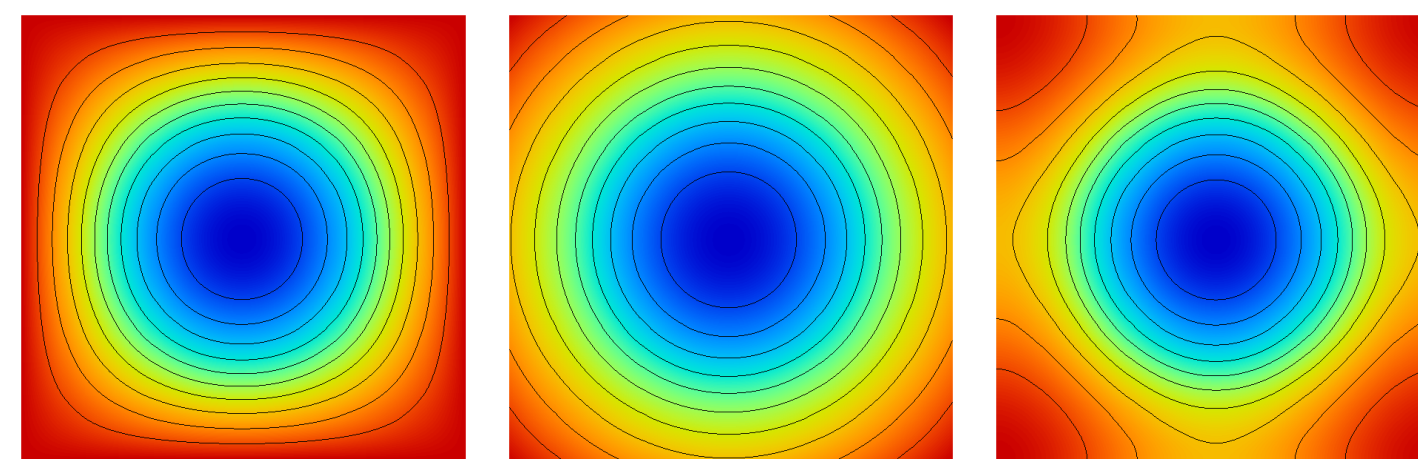


06 境界条件の設定

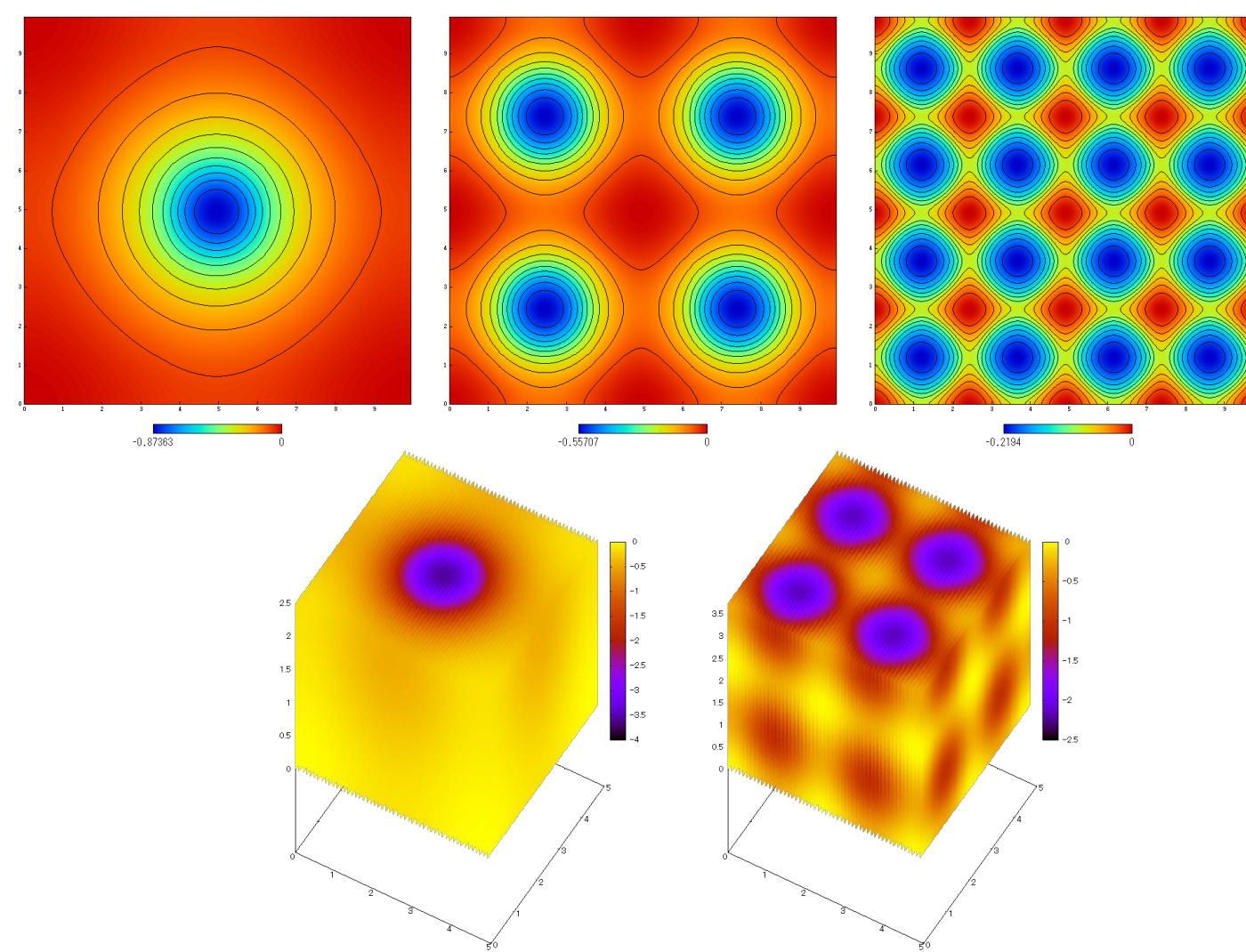
- Poisson方程式は次のような緩和法で解く。2次元の場合、 $\Delta x = \Delta y = h$ とし、以下を収束するまで繰り返す。

$$\phi_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - h^2 S_{i,j}}{4}$$

- Gauss-Seidel法等、より高速のアルゴリズムがある。
- Dirichlet条件(左), Robin条件(中), 周期境界条件(右)



07 周期境界条件



08 Schwarzschild時空

- BHの性質を調べるための準備。球対称、静的、真空を仮定するとSchwarzschild計量 g_{ij} が得られる。 $c=G=1$ とする単位系を用いている。

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

- $r=0$ および $2M$ で計量が発散するように見えるが、後者の半径がBHの表面と定義され、事象の地平面(Event Horizon)と呼ぶ。無限遠にいる観測者にとって、 $r=2M$ より内側から発した光は決して届かない。

09 測地線方程式を解く(1)

- Schwarzschild計量において、 $r=2M$ となる面がBHの表面であった。ここで $d\theta = d\phi = 0$ として、 $t-r$ 座標のみを用いて測地線方程式を書き下すと以下のようになる。

$$\frac{\partial u^t}{\partial \lambda} - \frac{2Mu^t u^r}{2Mr - r^2} = 0$$

$$\frac{\partial u^r}{\partial \lambda} - \frac{M(2M-r)u^t u^t}{r^3} + \frac{Mu^r u^r}{2Mr - r^2} = 0$$

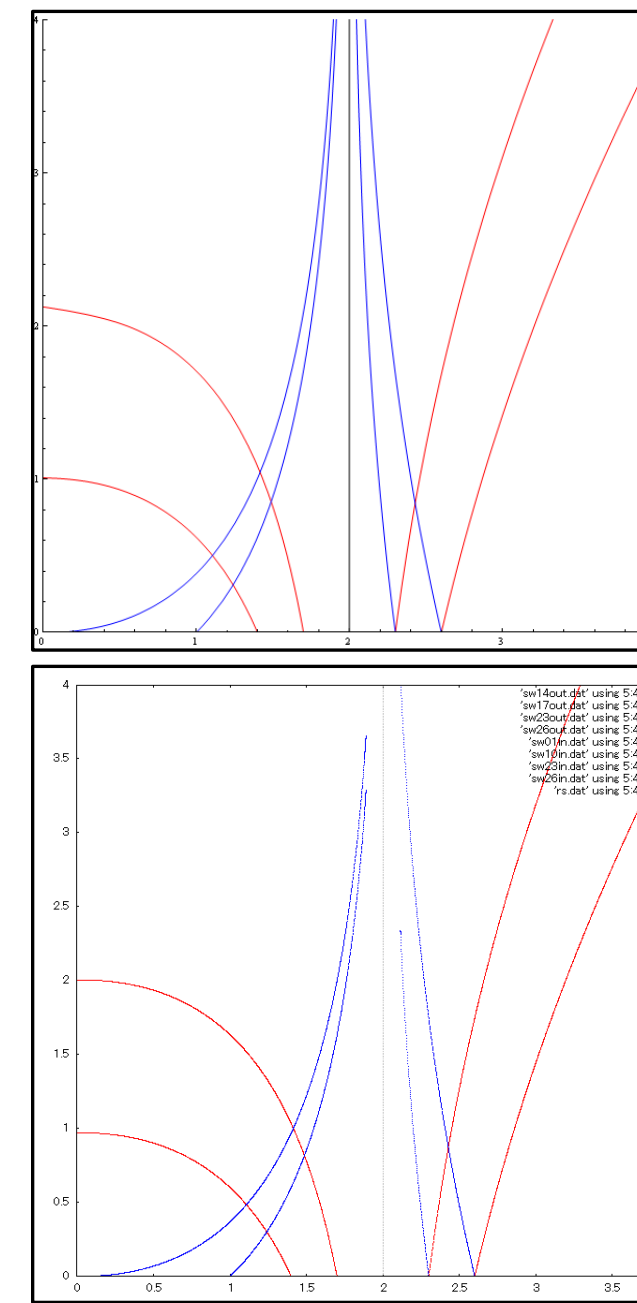
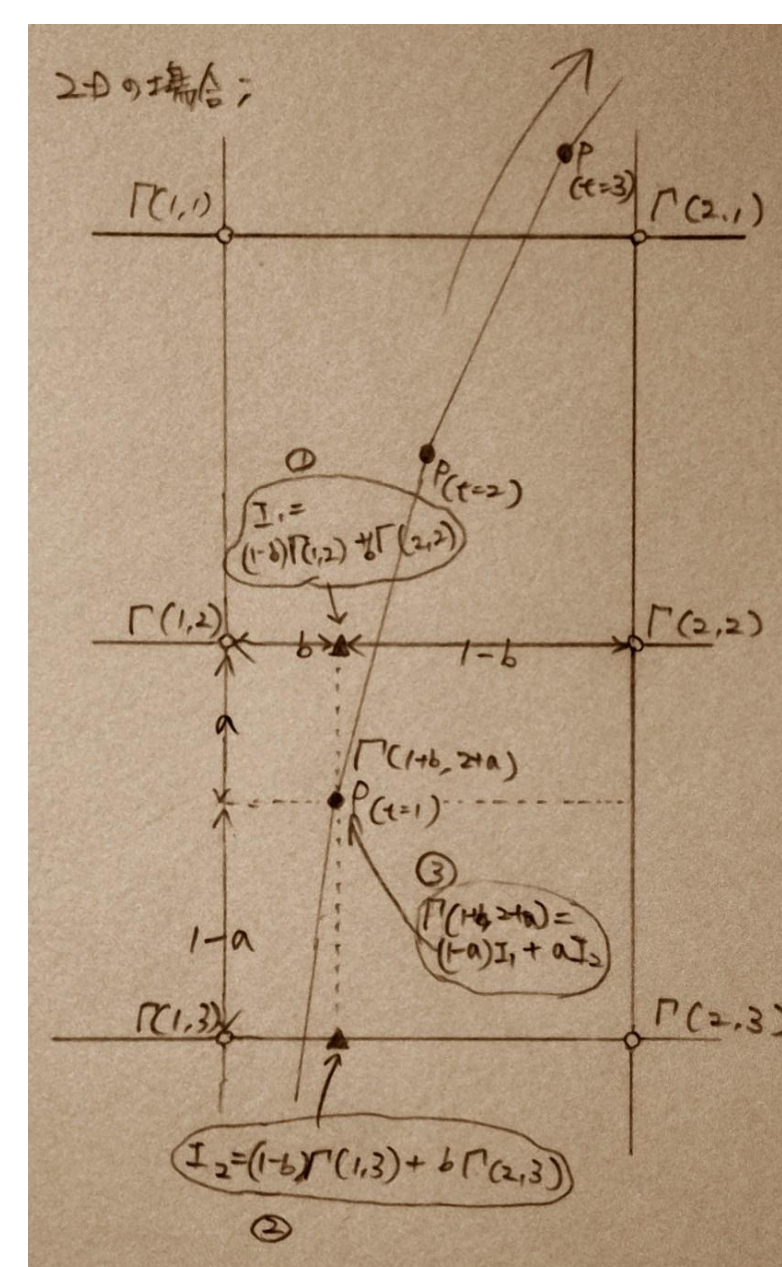
- 光の場合は微小距離(世界間隔) $ds^2 = g_{ij}x^i x^j = 0$ であることから、 u^i に関する条件を次のように設定する。

$$u^t = \sqrt{\frac{g_{11}u^r u^r}{g_{00}}}$$

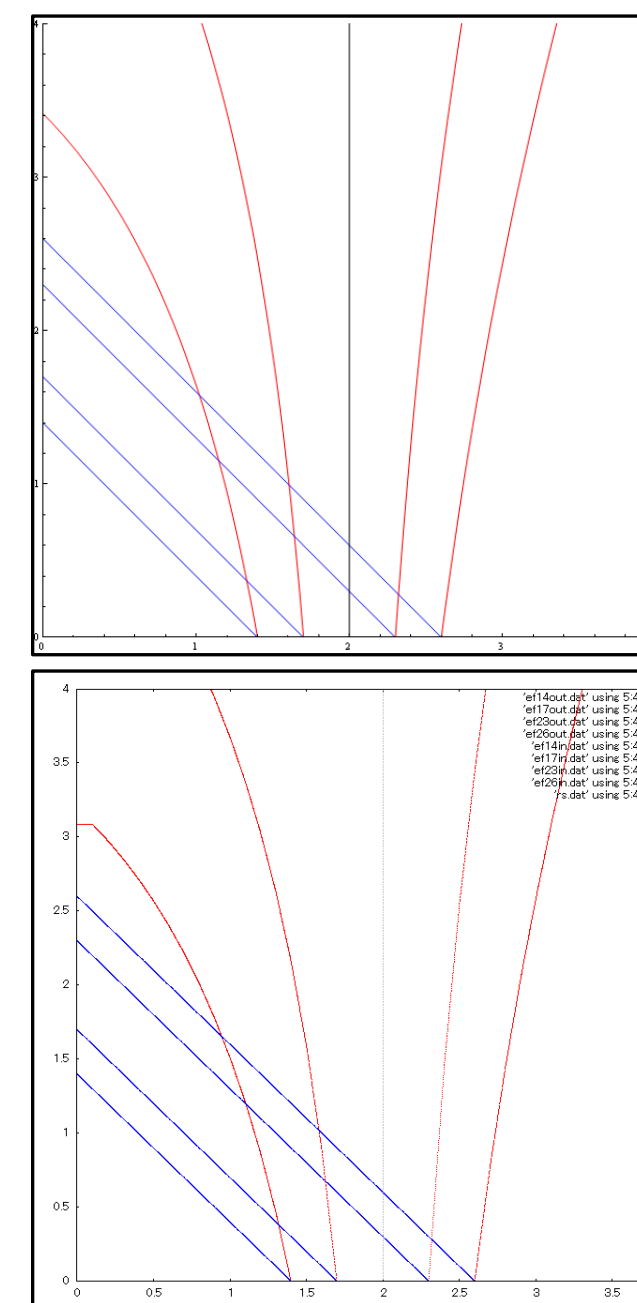
- 計量(線素の式)から直に $t-r$ の関係を調べることもできる。

- 今後は任意の計量でBHの判定を行うことになる。プログラムのテストとして、Schwarzschild計量のもとで測地線方程式を解く。空間を離散化し、各点での物理量を計算・保持する。

- 光の位置での接続係数が各スライスごとに必要になるため、周辺の値から内挿することになる。



- 左上: Schwarzschild座標における $t-r$ の関係(線素の式から求めたもの)。BHの半径 r_s は2である。赤線は外向きに放った光、青線は内向きに放った光の軌跡を表す。
- 左下: 同じ条件において、測地線の方程式を数値的に計算したものの。



- 左上: Eddington-Finkelstein座標を用いて $t-r$ の関係(線素の式から求めたもの)を表したものの。条件・表示は上に同じ。
- 左下: 数値的計算版。
- Schwarzschild時空において $r=2M$ で計量が発散するのは、座標系の取り方に問題があるため。
$$\bar{t} = t + 2M \ln(r - 2M)$$
として、 $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (\bar{t}, r, \theta, \phi)$ と新たに座標を取り直す。
- BHの中心である $r=0$ は真の特異点であり、座標変換でこれを消すことはできない。

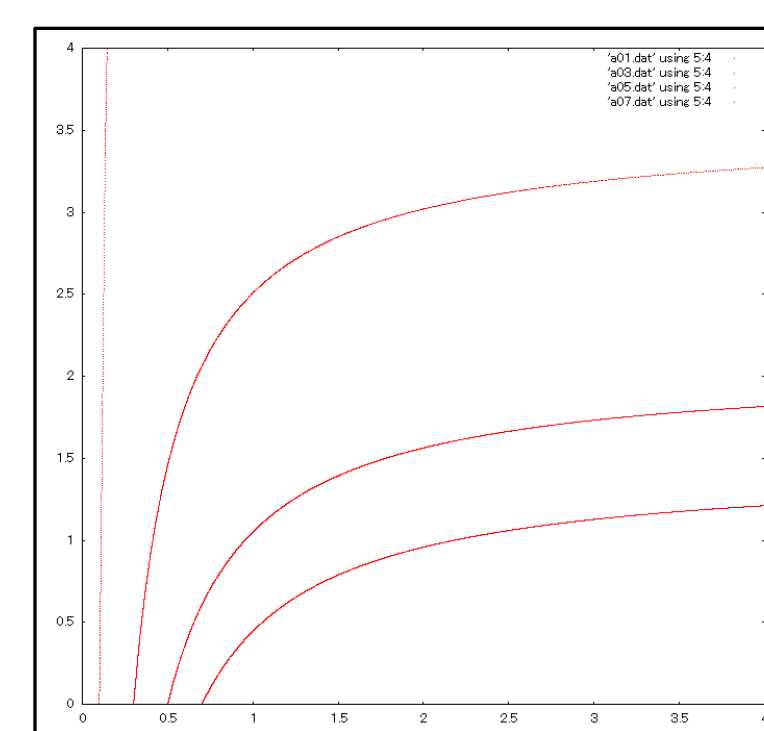
10 測地線方程式を解く(2)

- 任意の計量での計算。物質分布からポテンシャルを求めたものの軌跡を計算するため、とりあえず次のような3次元対角計量 g_{ij} を設定し、測地線方程式を解く。4次のRunge-Kutta法を用いた計算用プログラムを作成した。

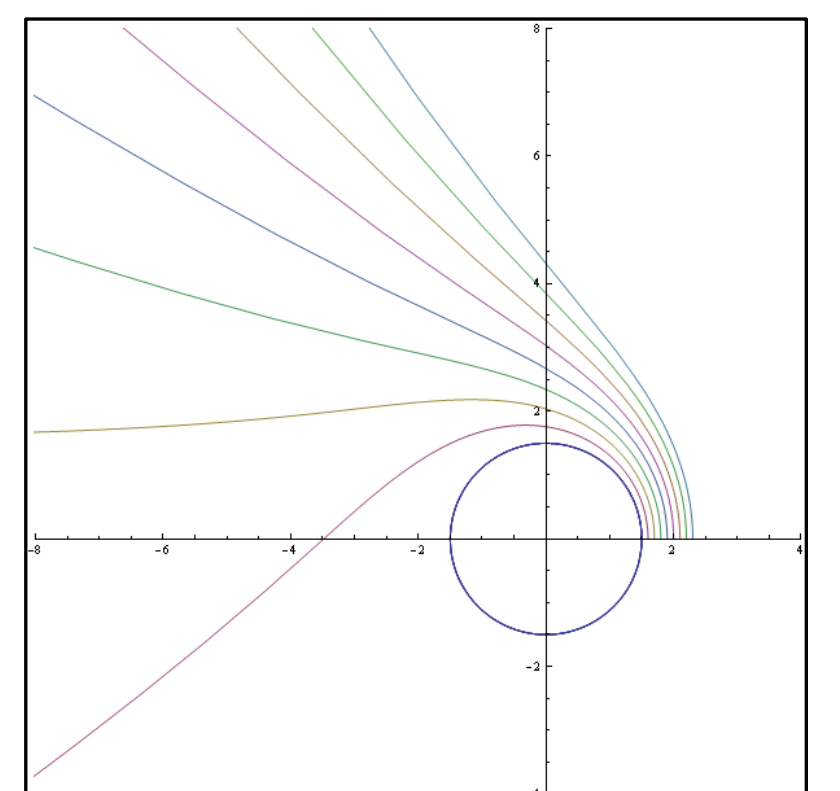
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (\varphi(x, y, z))^4 & 0 & 0 \\ 0 & (\varphi(x, y, z))^4 & 0 \\ 0 & 0 & (\varphi(x, y, z))^4 \end{pmatrix}$$

- 測地線方程式(長いので、とりあえずx方向のみ):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} + 2u^x u^x \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = u^x$$



- 左: ポテンシャルを $1/r$ として測地線方程式を数値計算した結果($t-r$ 座標での表示)。結局どの位置からでも光は外に抜け出せる結果となったので、今後、要検証。



- 右: おまけ。Schwarzschild BHによって曲げられる光の軌跡(空間2次元で計算)。図でBHの半径 r_s は1であり、 $1.5r_s$ で円軌道を描くことが確認できる(有効ポテンシャルについての計算で、そうなることが知られている)。

11 今後の目標

- 格子(余剰次元)の周期に対するBHの半径と、その変形具合の関連を調べる(どこまで短くすれば隣のBHと繋がるか?)
- 扱った次元を4, 5, 6と増やし(周期境界を設定する方向を増やし)、BHの形状を調べる
- ポテンシャルを決める際に、背景時空の膨張の影響を与える項を加えて考える。3+1次元でのHamiltonian拘束条件式は次のようになる(解くべき式)。
$$8\Delta\psi = R\psi - (A_{ij}A^{ij})\psi^{-7} + \frac{2}{3}(\text{tr}K)^2 - 2\Lambda\psi^5 - 2\kappa\rho\psi^{5-n}$$
- 平坦な時空で、背景の曲率も無視すればNewton的になる。