

超越数・ゲーム理論

情報ゼミ生（3年次）レポート課題発表

超越数

加納伊吹

超越数って？

代数的でない数
どんな有理係数の代数方程式(1)の解にならないような複素数のこと
(1) $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ ($n \geq 1$ かつ各 a_i は有理数)

超越的な実数は無理数である。
例えば、 $\sqrt{2}$ も無理数だが超越数ではない。
無理数だから超越数であるという逆は成り立たない。

超越性が示されている例:円周率 π ネイピア数 e $\pi + e^x = ne^x$
超越性が示されていない例: $\pi + e$ $\pi - e$ e^{π}

超越性を示す意義

超越性の証明は、不可能の証明である。
つまり超越数ということは、その問題は絶対に解けないということと言い換えることができる。

数学には解決していない問題が多くある。
解けるか不可能だということが証明されない限り、未解決の問題は解く努力を続けなければならない。

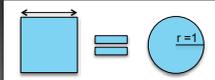
そういった意味で、不可能の証明というのは、数学分野において重要な意味を持っているのだ。

円積問題

ギリシャの三大作図問題の一つに円積問題というものがある。

「定規とコンパスだけを使って、円と同じ面積の正方形を作図せよ」
(円の正方形化)

単位円と同じ面積の正方形を考えると、正方形の面積が π になることから正方形の辺が $\sqrt{\pi}$ ということになり、1882年にフェルディナント・フォン・リンデマンが、 π が超越数であると証明したことにより、円積問題が不可能であることを厳密な証明が得られた。



まとめ

超越数とは、代数的数でない複素数のことを示している。超越性の証明は難しく、超越性が示されているもの同士の間も超越性がどうも定かではない。

超越性を示すこと=不可能の証明
未解決問題を解かなくてよくなる。

いろいろな関数の値の超越性や無理数性に関する未解決問題
→代数的独立性における予想として、シャヌエルの予想

文献紹介

本書は基本的に、解析学となくしらの分野の間わりについて多数の著者が執筆しているが、超越数だけを選んだとしても、ここだけでは説明しきれないため、このポスターを見た人が少しでも興味をわき、この文献を読むの助けになれば良いなと思っております。

ちなみに、私がこの超越数に興味を持った理由を挙げるとするならば、超越数って名前がかっこよかったという安易な理由である。

[1]数理科学 2017年9月号
[2]平田典子『対数一次形式の理論と応用 Hermitoから Baker,Matveev まで』

ゲーム理論

柳本晋吾

ゲーム理論

・ゲーム理論とは、人間行動の原理や意思決定の原則を分析する学問であり、アメリカの数学者ジョン・フォン・ノイマンがポーカーを分析するために生み出した理論である。
現在では遊戯ゲームはもちろんのこと日常生活、ビジネス・経済、自然科学の世界においても必要とされるようになった。

ナッシュ均衡

・ナッシュ均衡はゲーム理論の主な概念である。
・ナッシュ均衡とはある意思決定状況において各プレイヤーにおいて最善の選択は何かということを決める「均衡」を求める概念である。「均衡」とはプレイヤーたちがある種の基準で行動を選択する際に、最善と判断される状態のことである。

$$u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*)$$

$$u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y)$$

図1 数式で表すナッシュ均衡の定義

パレート効率性

・ナッシュ均衡において、どのプレイヤーも自分の利得を最大化する選択をしている。しかし、ナッシュ均衡が選び出す結果は、プレイヤー双方の利益という観点からみれば、必ずしも最善とは限らない。
・そこで、プレイヤー全員の利益をみた場合の最善とは何かについて定義しておく必要がある。これを考えるときの基準にゲーム理論の中では、パレート効率性を用いる。言い換えれば、一方の利益を下げないでもう一方の利益を上げることのできない状態にあるとき、パレート効率的であるといえる。

囚人のジレンマ①

- ある独房に共謀して大きな罪を犯した疑いがある囚人2人(AとB)が収監されている。2人は黙秘と自白の2つの選択肢を持っている。よって以下の4通りがある。
- ①2人とも自白した場合、犯罪が確定し5年の刑罰。
- ②Aだけが自白しBは黙秘した場合、Aは罪が軽くなり1年の刑罰、Bは逆に重くなり10年の刑罰。
- ③Bだけが自白しAは黙秘した場合、Bは罪が軽くなり1年の刑罰、Aは逆に重くなり10年の刑罰。
- ④2人とも黙秘した場合、刑は余罪のみとなり2年の刑罰。

囚人のジレンマ②

囚人は別々の場所に収監されているため、相談することができない。よって合理的判断で意思決定しなければならない。

		囚人B	
		黙秘する	自白する
囚人A	黙秘する	2年、2年	10年、1年
	自白する	1年、10年	5年、5年

囚人のジレンマ③

- 囚人Aの立場から考える。囚人Bが黙秘を選んだ場合、Aは黙秘すれば2年で済むが、自白した場合1年で済む。よってAは自白を選ぶ。
- 次に、Bが自白した場合、Aは黙秘すれば10年になり、自白すれば5年になる。よってこの場合も自白を選ぶ。
- BもAと同じで自白を選ぶことになる。よって、どちらも自白になるので5年の刑になる。

これを「個人合理的な行動」つまり「ナッシュ均衡」と呼ぶ。

囚人のジレンマ④

- 前のスライド③で自白が選ばれたと言ったが、これはA、B個人の判断で決定された意思であり、全体からみればAもBも黙秘する方が、刑期が2年になるのでこちらの方が利がある。

これを「社会合理的な行動」つまり「パレート効率」と呼ぶ。

しかし、これは理論上の話であり実際には相手の裏切りや人間関係、社会状況などが混じり何を選択するのが難しい問題である。