

2013年度 卒業論文

# 周期境界条件下に配置されたブラックホールの変形

大阪工業大学 情報科学部 情報メディア学科  
宇宙物理・数理科学研究室  
C10-094 森本 恭将  
2014年2月10日

# 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>3</b>
1.1	背景	3
1.2	目的	3
1.3	本論文の構成	3
<b>2</b>	<b>準備</b>	<b>4</b>
2.1	物理量の表現	4
2.2	計量テンソル	5
2.3	共変微分	5
2.4	測地線の方程式	6
2.5	曲率テンソル	6
2.6	Einstein 方程式	7
<b>3</b>	<b>球対称時空</b>	<b>8</b>
3.1	Schwarzschild 解	8
3.2	光線の軌跡	8
<b>4</b>	<b>相対論の初期値設定問題</b>	<b>10</b>
4.1	ADM 形式	10
4.2	座標条件	11
<b>5</b>	<b>数値計算の手法</b>	<b>12</b>
5.1	微分	12
5.2	楕円形偏微分方程式の解法	12
5.2.1	差分法	12
5.2.2	境界条件	15
<b>6</b>	<b>シミュレーション方法</b>	<b>18</b>
6.1	計算領域の設定	18
6.2	Hamiltonian constraint を解く	18
6.3	lapse 関数を求める	18
6.4	測地線方程式を解く	19
6.5	軸対称ブラックホールの表面積を求める	21
<b>7</b>	<b>結果</b>	<b>22</b>
7.1	ブラックホール形状の変化	22
7.2	ブラックホール表面積の変化	24
7.3	計算時間の削減	26
<b>8</b>	<b>おわりに</b>	<b>27</b>

# 1 はじめに

## 1.1 背景

通常、ブラックホールは軸対象であるものと認識されている。しかし、ブラックホール同士が接近すれば、互いの重力によってその表面 (事象の地平面, Event Horizon) が変形する様子が観測できるだろう。等間隔の格子状に敷き詰めたとすれば、ブラックホール同士の引力が釣り合い、静止することが予想される。実際にマイクロ世界でそのような現象が起こることが予想されており、その根底にあるのはコンパクト化された次元 (Compactified Dimension) という概念である。理論物理学において主に重力を扱うための比較的新しいアイデアに物質の基本単位を1次元の弦であるとする超弦理論があるが、ここから4次元時空を超える余剰次元のアイデアが派生した。数学的な理論の整合性のためには余剰次元の存在を認めなくてはならないが、従来の理論で記述されるマクロな現象との矛盾を排除するために、余剰次元は短く閉じている (=コンパクト化) とする発想である。コンピュータの性能の向上には著しいものがあり、妥当な初期条件を与える方法論の研究等 [8] とともに、高次元時空におけるブラックホールの安定性等を検証する数値シミュレーションが比較的容易に行われるようになってきている [9][10]。

## 1.2 目的

本研究ではコンパクト化された時空におけるブラックホールの形状を議論するための初歩的な段階として、4次元時空でのシミュレーションを行う。コンパクト化された次元は、計算領域の両端が連続的に繋がっているものとして扱う周期境界条件によって再現することができる。これは等間隔にブラックホールを配置することと同義である。研究の目的は、このようにブラックホールを配置した空間において、ブラックホール同士の間隔を変えた際に変形の具合はどうか、一般相対論的な枠組みのもとで数値シミュレーションを行って確認することである。ブラックホール同士が十分に近付けば、その事象の地平面はひとつに繋がると予想され、周期境界条件を2軸や3軸に設定した際にはどのような変形の過程を経て繋がるのかを確認する。

また、ブラックホール同士が接近すると互いの重力を補うために、個別の事象の地平面は広くなると予想される。本論文では2つ目の目的として、1軸に周期境界条件を設定したブラックホールにおいて周期と表面積の関係を調べる。

## 1.3 本論文の構成

第2章では一般相対論における数学的な基礎と、テスト粒子の軌跡を決める測地線方程式および Einstein の重力場の方程式について簡単に説明する。第3章では Einstein 方程式の厳密解のひとつである Schwarzschild 解について、その時空での光の軌跡や別の座標系での表現について説明する。第4章では一般相対論の数値的手法の枠組みである ADM 形式を紹介し、シミュレーションにおいて時空の計量を決定する方法について説明している。第5章では主に楕円形偏微分方程式の差分化解法について紹介し、直接法および反復法での実行時間を計測して比較を行っている。さらに、Newton ポテンシャルを計算して境界条件の効果について考察している。第6章では実際のシミュレーションの方法や初期条件について説明している。第7章ではシミュレーションの結果と考察を述べている。

## 2 準備

本章では [1][2][3][6] を参照した。尚、同じ項で上下に重複する添字が出てきたら、その添字について総和を取るという Einstein の縮約記法を用いる。

### 2.1 物理量の表現

ある座標系の上に貼り付けられた別の座標系を考える。この一般座標変換に対する変換性から、物理量は分類される。

#### スカラー

座標系によらず不変である量をスカラーという。すなわち、元の座標系  $x$  および新しい座標系  $x'$  において

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (1)$$

であるような  $\phi$  がスカラーである。

#### ベクトル

空間の任意の点で定義された線形独立なベクトルの組  $e_\mu$  を基底ベクトルあるいは基底という。物理量を基底の線形結合として表した際の展開係数がベクトルの成分である。基底の選び方は任意であるため、例えばある物理量を基底  $e_\mu$  および  $e_{\mu'}$  のもとで表したベクトルは

$$\mathbf{A} = A^\mu e_\mu = A^{\mu'} e_{\mu'} \quad (2)$$

のようになる。ベクトルが表す物理量そのものは座標系によらず不変な量であるため、基底の変化に対応してベクトルの成分が変わるのである。別の座標系に変換するというのは、新しい基底で物理量を展開する、という意味である。次に微小距離  $d\mathbf{x}$  を考えると、

$$d\mathbf{x} = dx^\mu e_\mu = dx^{\mu'} e_{\mu'} \quad (3)$$

ここから

$$e_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} e_\mu \quad (4)$$

となるが、これが基底ベクトルの変換則である。式 (4) を式 (2) に代入すると、

$$A^{\mu'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} A^\mu(x), \quad A^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} A^{\mu'}(x') \quad (5)$$

という関係式が得られる。式 (4) と式 (5) を比較して、その変換行列は逆行列になっている。このように基底と反対の形で変換するベクトルを反変ベクトルという。これに対し、

$$A_{\mu'}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} A_\mu(x), \quad A_\mu(x) = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} A_{\mu'}(x') \quad (6)$$

というように、基底と同じ形で変換するベクトルを共変ベクトルという。

#### テンソル

各々の添字についてベクトルと同様の変換をする量をテンソルという。 $n$  階の反変テンソルとは、一般座標変換に対する変換性が  $n$  個の反変ベクトルの積と等しいものをいう。同様に  $m$  階の共変テンソルとは、 $m$  個の共変ベクトルの積と同じ変換性をもつ。これらの変換性が混ざったテンソルも定義することができ、一般的に書くと式 (7) のようになる。

$$T^{\mu'_1 \cdots \mu'_m}_{\nu'_1 \cdots \nu'_n}(x') = \left( \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \right) \cdots \left( \frac{\partial x^{\mu'_m}}{\partial x^{\mu_m}} \right) \cdot \left( \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \right) \cdots \left( \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x^{\nu'_n}} \right) T^{\mu_1 \cdots \mu_m}_{\nu_1 \cdots \nu_n}(x) \quad (7)$$

これを  $m$  階反変  $n$  階共変の混合テンソルという。ベクトルは 1 階のテンソル、スカラーは 0 階のテンソルである。

## 2.2 計量テンソル

基底の内積を計量テンソルとして定義する.

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \otimes e_\nu \quad (8)$$

これは次のように変換される.

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} \quad (9)$$

すなわち,  $g_{\mu\nu}$  は共変テンソルである. 式 (3) および式 (8) から微小距離  $d\mathbf{x}$  の内積を考えると,

$$ds^2 \equiv d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (dx^\mu e_\mu) \cdot (dx^\nu e_\nu) = dx^\mu dx^\nu e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (10)$$

となり, これが一般相対論が扱う空間である Riemann 空間における 2 点間の距離の定義である. 内積はスカラー量になるので, 一般座標変換に対して不変である. 例として 2 次元曲面において展開すると, 2 点間の距離  $ds^2$  は

$$ds^2 = g_{11}dx^1dx^1 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}dx^2dx^2 \quad (11)$$

$$= g_{11}dx^1dx^1 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}dx^2dx^2 \quad (12)$$

として表される. 対角成分  $g_{\mu\nu} = 1 (\mu = \nu)$ , 非対角成分  $g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$  のとき, 平坦な 2 次元平面を Cartesian 座標系で表したものに相当する. 非対角成分は斜交座標系を用いた際に値を持つ.  $ds^2$  の式は線素の式と呼び, 4 次元時空であれば  $ds^2$  は世界間隔である. 計量の例として, 球座標では

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (13)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & r^2 & & \\ & & r^2 \sin^2 \theta & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (14)$$

平坦な Minkowski 空間では

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (15)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

となる. また,  $g_{\gamma\nu}$  の逆  $g^{\mu\gamma}$  も計量と呼び,  $g^{\mu\gamma} \cdot g_{\gamma\nu} = \delta_\nu^\mu$  を満たす. 反変ベクトル  $A^\nu$  を用いて  $g_{\mu\nu} A^\nu$  という量を考えると, 添字  $\nu$  について縮約していることから, 全体は共変ベクトルと同じ変換をする. 逆も同様であり,

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (17)$$

というように, 計量は反変ベクトルを共変ベクトルに, または共変ベクトルを反変ベクトルに変える働きをする.

## 2.3 共変微分

スカラー量  $\phi$  の微分  $\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$  はベクトルとなる. ベクトルの微分は微小距離だけ平行移動した際の成分の差であるが, Riemann 空間においては各点で計量が定義されている, すなわち基底が異なるため, それを補正する項を導入する必要がある. 基底を考慮して反変ベクトル  $A^\mu$  を微分することを考えると,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial (A^\mu e_\mu)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} e_\mu + A^\mu \frac{\partial e_\mu}{\partial x^\alpha} \quad (18)$$

となる.  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^\alpha}$  がベクトルのように振る舞うならば右辺の第 2 項もベクトルであり, それらは基底の線形結合として表されるはずである. そこで  $\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\alpha}$  を

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} e_\gamma \quad (19)$$

と置く．ここで係数  $\Gamma^\gamma_{\mu\alpha}$  を Christoffel 記号という．これによってベクトルの共変微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial(A^\mu e_\mu)}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} e_\mu + A^\mu \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} e_\gamma \\ &= \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\nu \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \right) e_\mu\end{aligned}\quad (20)$$

ここから成分だけを取り出して

$$\nabla_a A^\mu \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} A^\nu \quad (21)$$

と表される．共変ベクトルの共変微分は

$$\nabla_a A_\mu \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\nu_{\mu\alpha} A_\nu \quad (22)$$

となる．さらに，混合テンソルの共変微分は

$$\nabla_a T^\mu_{\nu} \equiv \frac{\partial T^\mu_{\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} T^\gamma_{\nu} - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha} T^\mu_{\gamma} \quad (23)$$

となる．Christoffel 記号は計量の組み合わせによって定義され，通常は第 2 種 Christoffel 記号と呼ばれる，

$$\Gamma^\alpha_{ij} = \frac{1}{2} g^{\alpha k} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (24)$$

を用いる．

## 2.4 測地線の方程式

測地線の方程式は曲がった時空中における直線を表す式であり，既知の計量のもとで初期値を与えられたテスト粒子の運動を記述する．以下の式で表される．

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (25)$$

平坦な時空であれば計量の微分値が全て 0 になるため，測地線の方程式は

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} = 0 \quad (26)$$

となるが，これは Newton の運動方程式と同形である．

## 2.5 曲率テンソル

赤道上から極へ向かって平行移動し，そこで右に 90 度向きを変えて赤道に戻ってくる．さらに右に 90 度向きを変えて元の位置に戻ってくると，もとの向きから 90 度変化していることがわかる．同様に，ベクトルを平行移動によって微小な閉路を一周させた際の元のベクトルとの差を曲率として定義し，時空の曲がり具合を定量化する．閉路が  $x^\mu = a$ ,  $x^\mu = a + \Delta a$ ,  $x^\nu = b$ ,  $x^\nu = b + \Delta b$  の 4 辺に囲まれていると考えて，ベクトルを  $(a, b) \rightarrow (a + \Delta a, b) \rightarrow (a + \Delta a, b + \Delta b)$  と移動させた場合と  $(a, b) \rightarrow (a, b + \Delta b) \rightarrow (a + \Delta a, b + \Delta b)$  と移動させた場合での差をとればよい．前者は  $\mu \rightarrow \nu$  の順に共変微分を行うことに相当し， $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \equiv A^\mu_{,\nu}$  とすると

$$\begin{aligned}\nabla_\nu (\nabla_\mu A^\gamma) &= (\nabla_\mu A^\gamma)_{,\nu} + \Gamma^\gamma_{\lambda\nu} (\nabla_\mu A^\lambda) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} (\nabla_\lambda A^\gamma) \\ &= A^\gamma_{,\mu\nu} + \Gamma^\gamma_{\xi\mu,\nu} A^\xi + \Gamma^\gamma_{\xi\mu} A^\xi_{,\nu} + \Gamma^\gamma_{\tau\nu} A^\tau_{,\mu} + \Gamma^\gamma_{\tau\nu} \Gamma^\tau_{\xi\mu} A^\xi - \Gamma^\tau_{\mu\nu} \nabla_\tau A^\gamma \\ &= \left( \Gamma^\gamma_{\xi\mu,\nu} + \Gamma^\gamma_{\tau\nu} \Gamma^\tau_{\xi\mu} \right) A^\xi + (\text{添字 } \mu, \nu \text{ について対称な項})\end{aligned}\quad (27)$$

となり，後者も同様に  $\nu \rightarrow \mu$  の順に共変微分を行い，

$$\nabla_\mu (\nabla_\nu A^\gamma) = \left( \Gamma^\gamma_{\xi\nu,\mu} + \Gamma^\gamma_{\tau\mu} \Gamma^\tau_{\xi\nu} \right) A^\xi + (\text{添字 } \mu, \nu \text{ について対称な項}) \quad (28)$$

となる．するとこれらの差は

$$(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) A^\gamma = \left( \Gamma^\gamma_{\xi\mu,\nu} - \Gamma^\gamma_{\xi\nu,\mu} + \Gamma^\gamma_{\tau\nu} \Gamma^\tau_{\xi\mu} - \Gamma^\gamma_{\tau\mu} \Gamma^\tau_{\xi\nu} \right) A^\gamma \quad (29)$$

であり，括弧内部が Riemann 曲率テンソルとして定義される．

$$R^\gamma_{\xi\nu\mu} \equiv \Gamma^\gamma_{\xi\mu,\nu} - \Gamma^\gamma_{\xi\nu,\mu} + \Gamma^\gamma_{\tau\nu} \Gamma^\tau_{\xi\mu} - \Gamma^\gamma_{\tau\mu} \Gamma^\tau_{\xi\nu} \quad (30)$$

平坦な時空においては 0 となる．Riemann 曲率テンソルには強い対称性および反対称性がある．添字の縮約によって

$$R_{\xi\mu} \equiv g^{\lambda\nu} R_{\lambda\xi\nu\mu} = g^{\lambda\nu} g_{\lambda\tau} R^\tau_{\xi\nu\mu} = R^\gamma_{\xi\nu\mu} \quad (31)$$

および

$$R \equiv R^\tau_{\tau} = g^{\xi\mu} R^\tau_{\xi\tau\mu} \quad (32)$$

を得る．式 (26) を Ricci テンソル，式 (27) を Ricci スカラーあるいはスカラー曲率という．

## 2.6 Einstein 方程式

Einstein は物質分布と時空の歪みを結び付ける方程式があるのではないかと考え，計量  $g_{\mu\nu}$  が 10 個の独立成分を持つことから，これが満たすべき場の方程式として

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (33)$$

のような形を仮定した．右辺の  $T_{\mu\nu}$  は非相対論的流体力学における応力テンソルからの類推で，エネルギー運動量テンソルと呼ぶ．左辺の  $G_{\mu\nu}$  は Einstein テンソルといって，

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (34)$$

というような，計量の組み合わせからなる 2 階の対称テンソルである．定数  $\kappa$  は Newton 重力との比較により  $\frac{8\pi G}{c^4}$  と決まり，さらに積分定数に相当する宇宙定数  $\Lambda$  を導入して，Einstein の重力場の方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad \left( \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \right) \quad (35)$$

となる．通常は  $c = G = \pi = 1$  という単位系が用いられることが多い．本論文でもこの単位系に従う．

### 3 球対称時空

本論文においてブラックホールを判定するコードのテスト用時空とするため、Schwarzschild 解およびそれを Eddington-Finkelstein 座標で表したものを挙げ、光の軌跡について説明する。本章では [1][2][3][6] を参照した。

#### 3.1 Schwarzschild 解

原点  $r = 0$  に質量  $M$  の物体がある以外は真空中で、球対称かつ静的であり十分遠方で Minkowski 計量と一致するという要請から、Einstein 方程式の厳密解のひとつである Schwarzschild 計量

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (36)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & & & \\ & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (37)$$

を得る。  $r \rightarrow \infty$  で漸近的に Minkowski 計量となることが確認できる。また  $r = 0$  および  $r = 2M$  で計量が発散するが、それぞれを時空特異点および座標特異点と呼ぶ。前者は真の特異点であるが、後者は  $(t, r, \theta, \phi)$  という座標の選び方に起因するものであり、取り除くことが可能である。  $r = 2M$  の特異点を取り除く座標に Eddington-Finkelstein 座標

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 + \left(\frac{4M}{r}\right) d\bar{t}dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (38)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & \frac{4M}{r} & & \\ & 1 + \frac{2M}{r} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (39)$$

がある。これは  $r_s = 2M$  として

$$\bar{t} = t + r_s \ln(r - r_s) \quad (40)$$

と置き換えた新たな座標  $(\bar{t}, r, \theta, \phi)$  のもとで Schwarzschild 計量を表したものである。

#### 3.2 光線の軌跡

Schwarzschild 計量のもとで動径方向に進む光の軌跡を考える。光の場合  $ds^2 = 0$  であるため、

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}\right) dr^2 \quad (41)$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 + \frac{r_s}{r - r_s}\right) \quad (42)$$

さらに積分すると

$$t = \pm (r + r_s \ln|r - r_s| + C) \quad (43)$$

となる。  $C$  は時間の原点を決める定数である。正の解が外向きの光の軌跡であり、  $r \gg r_s$  で  $\frac{dt}{dr} \rightarrow 1$ 、  $t \simeq r$  となることから、十分遠方では Minkowski 時空と同様の振る舞いをするのがわかる。一方で  $r \rightarrow r_s$  においては  $\frac{dt}{dr} \rightarrow \infty$ 、  $t \rightarrow -\infty$  となり、  $r < r_s$  の場合では  $\frac{dt}{dr}$  は負の値をとるようになる。  $r \rightarrow 0$  では  $\frac{dt}{dr} \rightarrow 0$  となる。ここから、光は  $r = r_s$  より外へは出られないことがわかる。同様に負の解は内向きの光の軌跡であり、  $r \gg r_s$  で  $\frac{dt}{dr} \rightarrow -1$ 、  $t \simeq -r$  となって、Minkowski 時空と等しい。  $r \rightarrow r_s$  においては  $\frac{dt}{dr} \rightarrow -\infty$ 、  $t \rightarrow \infty$  となり、光は  $r = r_s$  より内側に入ることもできない。  $r < r_s$  の場合では  $t$  が負の値となっていることから、  $r \rightarrow r_s$  へ向かうような軌跡をとることがわかる。

これに対し、Eddington-Finkelstein 座標においては

$$\left(-1 + \frac{r_s}{r}\right) d\bar{t}^2 + \left(\frac{2r_s}{r}\right) d\bar{t}dr + \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 = 0 \quad (44)$$

$$-(d\bar{t} + dr) \left( \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) d\bar{t} - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr \right) = 0 \quad (45)$$

となり,  $(d\bar{t} + dr) = 0$  の解は傾き  $-1$  で内側に向かう光の軌跡であり,  $r = r_s$  を通過することができる. もうひとつの解に関しては

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) d\bar{t} - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr = 0 \quad (46)$$

$$\frac{d\bar{t}}{dr} = \frac{1 + \frac{r_s}{r}}{1 - \frac{r_s}{r}} = \frac{r + r_s}{r - r_s} = 1 + \frac{2r_s}{r - r_s} \quad (47)$$

さらに積分すると

$$\bar{t} = r + 2r_s \ln|r - r_s| + C \quad (48)$$

となる.  $r \gg r_s$  で  $\frac{d\bar{t}}{dr} \rightarrow 1$ ,  $\bar{t} \simeq r$  になることから, 十分遠方では Minkowski 時空と等しい.  $r \rightarrow 0$  では  $\frac{d\bar{t}}{dr} \rightarrow -1$  であり, 元の座標  $(t, r, \theta, \phi)$  で表した場合と異なっている. しかしながら, やはり  $r \rightarrow r_s$  において  $\frac{d\bar{t}}{dr} \rightarrow \infty$ ,  $\bar{t} \rightarrow -\infty$  となって, 外向きの光が  $r = r_s$  を通過することはできない. これらの軌跡を記したものが図 1 および図 2 である.  $r_s = 2$  としており, 実線が外向きの光, 破線が内向きの光を示す.

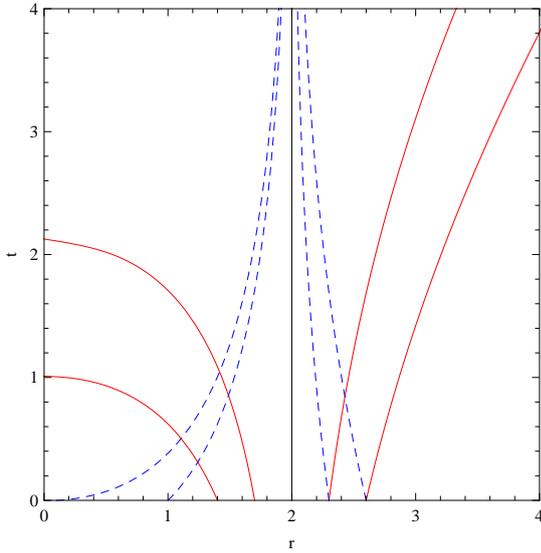


図 1: Schwarzschild 時空での光の軌跡

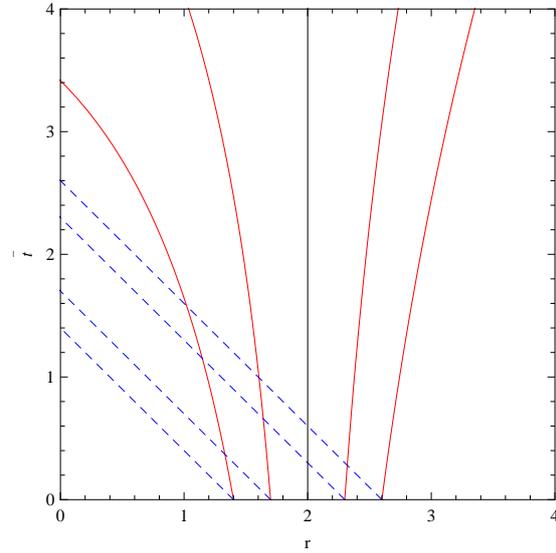


図 2: Eddington-Finkelstein 座標で表した場合

このような  $r = r_s = 2M$  の面を事象の地平面と呼び, その半径を Schwarzschild 半径という. この半径は Newton 力学において脱出速度が光速となる半径  $r = 2M$  と偶然一致する. 但しこれは, Newton 力学においては脱出速度が光速を超えていても領域を抜け出すことは可能であるが, 引き戻される (無限遠には到達できない) という意味であるのに対し, 一般相対論的には少しも領域外には飛び出せない, すなわち外部への因果関係を持たないという意味で異なっている.

## 4 相対論の初期値設定問題

本章では数値相対論の定式化方式である ADM 形式の概要および、本論文において解くべき式の説明を行う。本章では [7] を参照した。

### 4.1 ADM 形式

時空の時間発展を追うための手段として、Arnowitt, Deser, Misner の提案した Einstein 方程式の 3 + 1 分解、あるいはさらに一般化した  $N + 1$  分解がある。この枠組みは ADM 形式と呼ばれる。時間と空間を分離し、ステップ毎に時間  $t$  が一定の超曲面  $\Sigma(t)$  上の物理量を決定してゆくため、時間発展の計算に都合が良い。ADM 形式において 4 次元時空の計量  $g_{ij}$  は

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_l \beta^l) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (49)$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha^2 + \beta_l \beta^l & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{00} & g^{0j} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^j}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

とする。ここで

$$\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}, \quad \beta_j \equiv g_{0j}, \quad \gamma_{ij} \equiv g_{ij} \quad (52)$$

であり、 $\gamma_{ij}$  は 3 次元空間の計量である。 $\alpha$  は lapse 関数と呼ばれ、時間座標の取り方を示す。超曲面  $\Sigma(t)$  の法線ベクトルは

$$n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0) \quad (53)$$

$$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = \left( \frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^1}{\alpha}, -\frac{\beta^2}{\alpha}, -\frac{\beta^3}{\alpha} \right) \quad (54)$$

であり、 $\Sigma(t)$  上の点  $P$  からの法線が  $\Sigma(t+dt)$  の点  $P'$  と交わる時、その長さは比例係数を  $\alpha$  として  $\alpha dt$  と書ける。 $\beta^i$  は shift ベクトルと呼ばれ、空間座標の取り方を示す。 $\Sigma(t)$  上の点  $P$  と空間座標の等しい  $\Sigma(t+dt)$  の点  $P''$  の、 $P'$  とのずれを比例係数  $\beta^i$  を使って  $\beta^i dt$  と表す。この模式図を図 3 に記す。

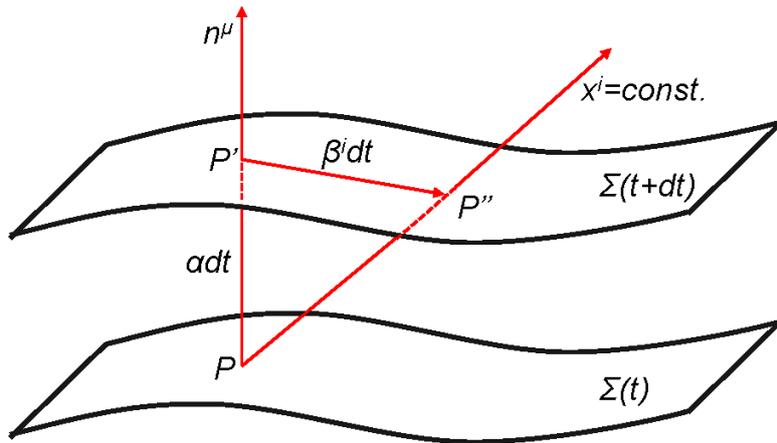


図 3: 3 次元超曲面  $\Sigma$  と lapse 関数  $\alpha$  および shift ベクトル  $\beta^i$

また、初期の物理量は Hamiltonian constraint および momentum constraint と呼ばれる拘束条件式を満たしている必要がある。本論文においては静的な場合の初期値のみを考えるため、Hamiltonian constraint のみを扱う。また、

求める物理量として空間の計量  $\gamma_{ij}$  および物質分布に相当する量  $\rho$  のみを考える. 3次元空間における Hamiltonian constraint は

$$8\hat{\Delta}\psi = \hat{R}\psi + \left(\frac{2}{3}K^2 - 2\Lambda\right)\psi^5 - 2\kappa\hat{\rho}\psi^{5-n} \quad (55)$$

となり, これを解いて conformal factor  $\psi$  を求める. これを用いて, 初期の物理量が conformal 逆変換

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \hat{\gamma}_{ij} \quad (56)$$

$$\rho = \psi^{-n} \hat{\rho} \quad (57)$$

によって得られる.  $\hat{\rho}$  は物質分布である.  $K_{ij}$  は 4次元時空に 3次元空間  $\Sigma(t)$  がどのように埋め込まれているかを表す量であり, 外部曲率と呼ぶ. これは法線ベクトル  $n_\mu$  の Lie 微分として定義されるが,

$$K_{ij} \equiv -\frac{1}{2}\mathcal{L}_n\gamma_{ij} \quad (58)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} - D_i\beta_j - D_j\beta_i \right) \quad (59)$$

であり, 3次元空間の計量の時間発展となっている.  $K$  は  $K_{ij}$  のトレース

$$K = \text{tr}K = \gamma^{ij}K_{ij} \quad (60)$$

である. 本論文では静的な時空を扱うため,  $K_{ij} = 0$ ,  $K = 0$  とする. 空間を表す候補である計量  $\hat{\gamma}_{ij}$  を  $\eta_{ij}$  とすることで, ラプラシアンは

$$\hat{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (61)$$

となり, また  $\hat{\gamma}_{ij}$  についてのスカラー曲率  $\hat{R} = 0$  となる. さらにパラメータ  $n = 5$  とすることで, 式 (55) は

$$8\hat{\Delta}\psi = -2\kappa\hat{\rho} \quad (62)$$

と書ける. これを解いて得られた conformal factor  $\psi$  を用いて, 物理量  $\gamma_{ij}$  および  $\rho$  が

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \eta_{ij} \quad (63)$$

$$\rho = \psi^{-5} \hat{\rho} \quad (64)$$

と決まる.

## 4.2 座標条件

lapse 関数  $\alpha$  および shift ベクトル  $\beta^i$  は座標条件と呼ばれ, 本論文でも計量の  $g_{tt}$  成分を求めるために, Maximal slicing と呼ばれる方法で  $\alpha$  を決める. これは時間発展を追う計算過程において特異点が発生しないようにするために考案されたもので, 超曲面  $\Sigma(t)$  上で常に  $K = 0$  となるような  $\alpha$  の取り方である. これは

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma^{ij}K_{ij}) = 0 \quad (65)$$

に発展方程式および式 (55) の Hamiltonian constraint を代入して得られる以下のような楕円型偏微分方程式

$$D^i D_i \alpha = \left\{ K_{ij}K^{ij} + \frac{1}{2}\kappa(S + \rho) - \Lambda \right\} \alpha \quad (66)$$

の解として得られる. 右辺の係数は物質のあるところで大きくなるので,  $\alpha$  は小さくなる.  $S$  は応力テンソル  $S_{ij}$  のトレースであり, 運動量を考えないので 0 とする. さらに  $K_{ij} = 0$  および  $\Lambda = 0$  の仮定により, 解くべき式は

$$D^i D_i \alpha = \frac{1}{2}\kappa\rho\alpha \quad (67)$$

となる.

## 5 数値計算の手法

シミュレーションで用いた偏微分方程式の解法や、境界条件による解の違いについて述べる。本章では [4] を参照した。

### 5.1 微分

lapse 関数の計算に現れる 1 階微分項や計量の空間微分には、2 次精度の中央差分を適用する。境界においては 2 次精度の前進差分および後退差分を適用する。区間  $[x_{min}, x_{max}]$  上で定義される関数  $f(x)$  について、 $x$  方向の微分は

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-f(x+2\Delta x) + 4f(x+\Delta x) - 3f(x)}{2\Delta x} & (x = x_{min}) \\ \frac{f(x-2\Delta x) - 4f(x-\Delta x) + 3f(x)}{2\Delta x} & (x = x_{max}) \\ \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} & (else) \end{cases}$$

となる。

### 5.2 楕円形偏微分方程式の解法

#### 5.2.1 差分化

例として次のような  $\phi$  についての 2 次元 Poisson 方程式を考える。

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2} = S(x,y) \quad (68)$$

ここで  $S(x,y)$  はソース項となる適当な関数である。この式を差分化するため、Taylor 展開の 2 次の項までを利用する。

$$\phi(x+\Delta x) \approx \phi(x) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 \quad (69)$$

$$\phi(x-\Delta x) \approx \phi(x) - \frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 \quad (70)$$

$$\phi(x+\Delta x) + \phi(x-\Delta x) = 2\phi(x) + \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 \quad (71)$$

$$\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} = \frac{\phi(x+\Delta x) + \phi(x-\Delta x) - 2\phi(x)}{(\Delta x)^2} \quad (72)$$

式 (72) を  $x, y$  それぞれについて求め、これを式 (68) の左辺に代入すると

$$\frac{(\Delta x)^2(\phi(x+\Delta x, y) + \phi(x-\Delta x, y) + 2\phi(x, y)) + (\Delta y)^2(\phi(x, y+\Delta y) + \phi(x, y-\Delta y) - 2\phi(x, y))}{(\Delta x)^2(\Delta y)^2} = S(x, y) \quad (73)$$

$\Delta x = \Delta y = h$  とし、表記も簡単化すれば、 $\phi$  の式は

$$\phi_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1} - h^2 S_{i,j}}{4} \quad (74)$$

となる。以上のようにして偏微分方程式は多元連立 1 次方程式に置き換えられる。これを解く方法として直接法と反復法を挙げ、これらの実行速度を確認する。

## 直接法

ここでは有限回のステップで解が厳密に求まる直接的解法として、Gauss の消去法を紹介する。まず係数行列  $A$  と未知数ベクトル  $x$  および右辺ベクトル  $b$  を作り、 $A$  と  $b$  からなる新しい行列を作る。例として 1 次元化した式 (74) は

$$\phi_i = \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - h^2 S_i}{2} \quad (75)$$

であるが、未知数が  $n$  個あり、 $\phi_1 = 0$ 、 $\phi_n = 0$  が与えられているとき、 $Ax = b$  および新しい行列  $A'$  は

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_{n-2} \\ \phi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 S_2 \\ h^2 S_3 \\ \vdots \\ h^2 S_{n-2} \\ h^2 S_{n-1} \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & h^2 S_2 \\ 1 & -2 & 1 & & h^2 S_3 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -2 & 1 & h^2 S_{n-2} \\ & & & & 1 & -2 & h^2 S_{n-1} \end{bmatrix} \quad (77)$$

のように書ける。 $A$  の成分を  $a_{ij}$ 、 $b$  の成分を  $b_i$ 、 $x$  の成分を  $x_i$  とする。次に

$$c = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}, \quad (j > i) \quad (78)$$

として決めた  $c$  で

$$a_{jk} = a_{jk} - ca_{ik} \quad (k = i+1, \dots, n) \quad (79)$$

とすることで、 $A'$  の左下非対角成分はすべて 0 になる。 $n$  行目は  $a_{nn}$  と  $b_n$  のみが残っているので、代入によって  $x_n$  が求められる。 $x_n$  が決まることで  $n-1$  行目も未知数として  $x_{n-1}$  のみが残され、求められるようになる。これを繰り返してすべての未知数が決まる。上三角行列を作る過程を前段過程と呼び、反復回数は未知数の数  $n$  の 3 乗に比例する。

## 反復法

適当な初期値から計算を繰り返し、解が十分収束したところで計算を打ち切るという方法が反復法である。計算領域全体を何度も更新することになり、 $N$  回目のループで得た解と  $N+1$  回目のループで得た解の差の絶対値の総和 (残差) がある程度以下になったことを収束判定とする場合が多い。直接法と異なり、任意の精度で計算を打ち切ることができる点が反復法の特徴である。反復法にもいくつかの実装法があり、式 (74) をそのまま解く方法を Jacobi 法という。式 (74) から明らかのように、計算の内容は  $\phi_{i,j}$  をその周辺の値の平均としているというものである。Jacobi 法では領域全体の計算を終えてから参照する  $\phi$  の値をまとめて更新する。すなわち

$$\phi_{i,j}^{new} = \frac{\phi_{i+1,j}^{pre} + \phi_{i,j+1}^{pre} + \phi_{i-1,j}^{pre} + \phi_{i,j-1}^{pre} - h^2 S_{i,j}}{4} \quad (80)$$

というように、新しいステップでの計算で参照する  $\phi$  の値は、4 近傍すべて古いステップでのデータである。しかし、あるグリッド  $\phi_{i,j}$  の値を計算した次に隣のグリッド  $\phi_{i,j+1}$  を計算するような場合、参照するグリッドのうち半数は更新後の値を使えるはずである。すなわち

$$\phi_{i,j}^{new} = \frac{\phi_{i+1,j}^{pre} + \phi_{i,j+1}^{pre} + \phi_{i-1,j}^{new} + \phi_{i,j-1}^{new} - h^2 S_{i,j}}{4} \quad (81)$$

という計算の進め方ができる。この手法は Gauss-Seidel 法と呼ばれ、Jacobi 法に比べて収束が速い。さらに、Gauss-Seidel 法に加速パラメータ  $\omega$  を導入した SOR (Successive Over-Relaxation) 法がある。これは得られた平均値に適当な倍率  $\omega$  を掛けて修正するというもので、式 (81) を

$$\phi_{i,j}^{new} = \phi_{i,j}^{pre} + \omega \left( \frac{\phi_{i+1,j}^{pre} + \phi_{i,j+1}^{pre} + \phi_{i-1,j}^{new} + \phi_{i,j-1}^{new} - h^2 S_{i,j}}{4} - \phi_{i,j}^{pre} \right) \quad (82)$$

という形にする。結局次のループでさらに同じ方向へ修正されるのであれば、その修正量を多めにとる方が収束性が良いだろう、という思想のものである。 $\omega = 1$  のとき Gauss-Seidel 法に一致し、 $0 > \omega > 2$  でない場合には収束性は保証されない。 $\omega < 1$  のときには Gauss-Seidel 法よりも収束が遅くなるが、Gauss-Seidel 法で発散してしまうような問題には有効である。

### プログラムの正当性の確認

ここで、プログラムの正当性を確かめるために、次のような 1 次元の Poisson 方程式を反復法で解いて誤差を調べた。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 1 \quad (83)$$

グリッド数  $N$  の領域で境界条件  $\phi(1) = 0$ ,  $\phi(N) = 0$  を与えると、厳密解は

$$\phi(x) = \frac{1}{2} (-Nx + x^2) \quad (84)$$

となる。式 (74) と同様に 2 次精度の近似式を得て、刻み幅  $h$  の変化に対する誤差 (厳密解との差) の増加具合を調べ、誤差のオーダーが  $O(h^2)$  であることを確認する。数値解を求める際には、グリッド数  $N = 100$  として、前回のループからの残差が  $10^{-4}$  を下回れば収束とする。結果は表 1 および図 4 のようになった。

表 1: 厳密解と数値解の誤差

刻み幅 $h$	誤差 $e$	刻み幅 $h$	誤差 $e$
0.01	0.2574	0.06	8.9199
0.02	0.9999	0.07	12.1374
0.03	2.2374	0.08	15.8499
0.04	3.9699	0.09	20.0574
0.05	6.1974	0.10	24.7599

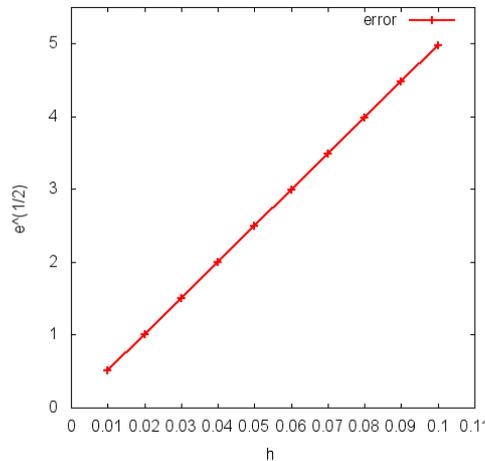


図 4: 厳密解と数値解の誤差

誤差  $e$  は  $h^2$  に比例して増加しており、差分式の解法を正しく実装できていることが確認できた。

### 計算速度の比較

1 次元の Poisson 方程式について、直接法として Gauss の消去法、反復法として Jacobi 法と Gauss-Seidel 法と SOR 法を用いて計算を行い、同じ処理性能 (Intel Core i7 920 2.66GHz) のもとで実行時間の比較を行った。式 (75) を、全体区間を  $[0.0, 10.0]$ 、ソース項は  $[4.0, 6.0]$  の区間で  $S_i = 1.0$ 、それ以外を  $S_i = 0.0$  という設定のもとで、グリッド数  $N$  を変化させて計算する。反復法において残差が  $10^{-4}$  を下回ったときを収束判定とした。また SOR 法の加速パラメータ  $\omega = 1.9$  とした。結果を表 2 および図 5 に示す。

結局、グリッド数  $N$  が大きくなれば反復法の方が高速に近似解を求められることが確認できた。特にこの問題においては SOR 法の収束が非常に速く、反復法の実装法に比べて数分の 1 の時間で同じ精度の解を求められた。反復法同士で実行時間の増加の仕方はほぼ同じであり、時間計算量のオーダー自体に差は無いとわかる。反復法の

表 2: 連立一次方程式の計算時間

$N$	Gauss の消去法	Jacobi 法	GS 法	SOR 法
500	0.1404	0.4836	0.3432	0.0780
1000	4.6800	2.9952	2.6832	0.3900
1500	18.9697	9.4069	8.5021	1.3572
2000	49.6083	21.3253	19.0945	3.1044
2500	103.8811	39.9987	35.3810	5.8968
3000	189.5568	66.7060	58.8124	9.9997

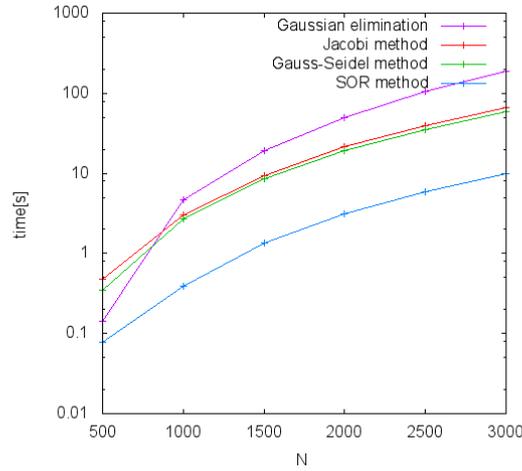


図 5: 連立一次方程式の計算時間

実行時間はグリッド数  $N$  と反復回数  $i$  の積に比例すると考えられるが、直接法では三角行列の計算に  $N^3$  に比例する時間が必要なので、シミュレーションで  $N = 50^3$  のようなグリッド数で計算することになる以上、直接法を用いることは現実的ではない。本論文では SOR 法を使って差分化された偏微分方程式の解を求めることとする。

### 5.2.2 境界条件

差分化によって偏微分方程式を連立 1 次方程式に書き換えることができたが、式の本数よりも未知数の個数の方が多くなり、解が一意に定まらない。そのため、領域外周部の値を決める必要がある。5.1.1 で行ったように、 $\phi$  を  $0 < x < L$  の範囲で解く際、 $\phi_0 = \phi_L = C$  のように境界値をすべて定数と置くような条件を Dirichlet 境界条件という。適当な定数あるいは関数  $g$  を使って  $C_1\phi_0 + C_2\phi'_0 = g$ ,  $C_1\phi_L + C_2\phi'_L = g$  のように定数と微分値の和を与えるような条件を Robin 境界条件、 $\phi_0 = \phi_L$  のように計算領域を閉じる条件を周期境界条件と呼ぶ。例えば Dirichlet 境界条件は、周囲が定電位となっている領域における静電ポテンシャル等の現象を記述する。Robin 境界条件は領域が無限に広がっているような状態を再現でき、中心にソース項がある場合の重力ポテンシャルや静電ポテンシャルにおいて軸対称の解を得られる境界条件のひとつである。周期境界条件では一定の周期で並進対称となっているような現象を記述できる。これが本論文において適用する境界条件であり、等間隔に物体を敷き詰めた場合に相当する。

Robin 境界条件および周期境界条件を設定して、Newton ポテンシャル  $\phi$  の式

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (85)$$

を  $(x, y)$  座標上の 2 次元で解いた。計算領域の長さ (周期) は  $L = 5.0$  とした。ここで  $4\pi G = 1$  とし、質量密度  $\rho$  は

$$\rho = \begin{cases} 1 & (r < 0.5) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases} \quad (86)$$

と与えた。周期境界条件では、1 グリッドあたりの距離は固定しつつ、周期  $L$  を  $[2.0, 5.0]$  の範囲で変えて比較を行った。ポテンシャルの歪み具合を示すため、異なる角度から解の断面を調べた。一方は  $y = L/2$  の一定面であり、もう一方は  $x = y$  という、対角線にあたる面である。後者は領域の中心からの距離が前者に等しくなるよう、切り取る端点を調整している。Robin 境界条件では  $\phi$  は図 6 のようになった。縦軸が  $\phi$  である。

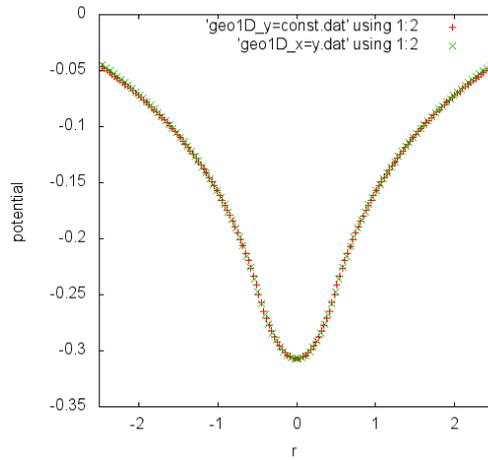


図 6:  $\phi$  : Robin 境界条件

$\phi$  は  $y = L/2$  面と  $x = y$  面で等しくなっており，軸対称 (点対称) となることが確認できた．次に周期境界条件において，周期  $L$  を変えながら  $\phi$  の値を調べると，図 7～図 10 のようになる．縦軸が  $\phi$  である．

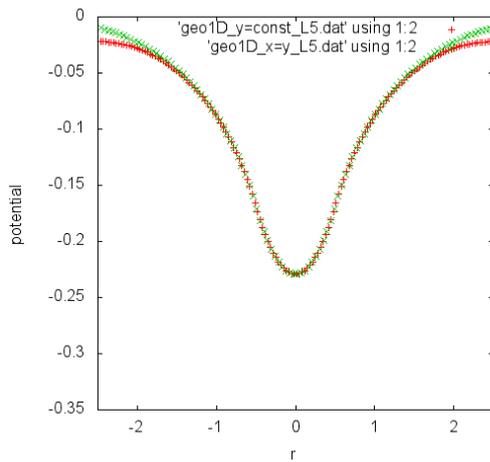


図 7:  $\phi$  : 周期境界条件 ( $L = 5.0$ )

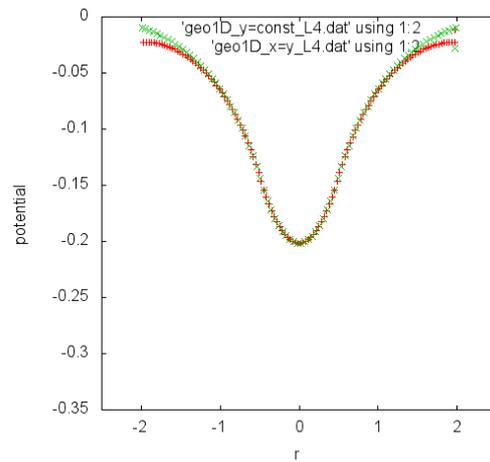


図 8:  $\phi$  : 周期境界条件 ( $L = 4.0$ )

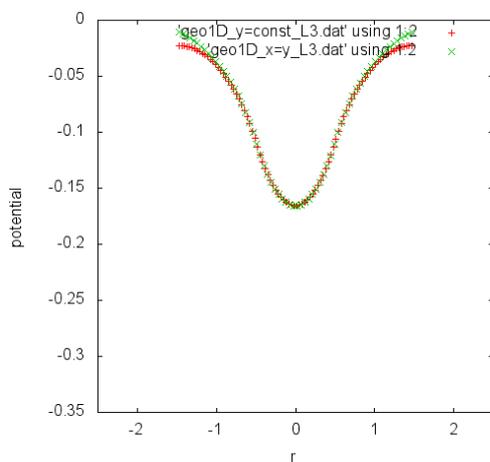


図 9:  $\phi$  : 周期境界条件 ( $L = 3.0$ )

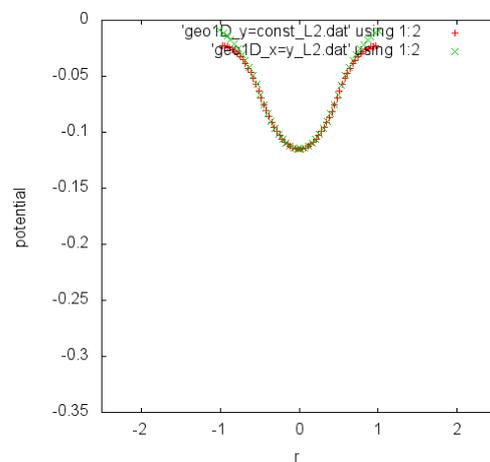


図 10:  $\phi$  : 周期境界条件 ( $L = 2.0$ )

すべての場合において端点，すなわち中心からの距離が等しい位置での  $\phi$  の値が異なっており，歪んだ形のポテ

ンシャルとなっていることが確認できる。ポテンシャルの深さは周期  $L$  が短くなるにつれ浅くなっているが、端点での  $\phi$  の値の差にそれほど差は見られない。このことから、全体的な歪みの大きさは周期  $L$  が短くなると大きくなるといえる。尚、ポテンシャルの勾配は重力場のベクトルとなる。この絶対値を計算し、 $y = L/2$  面と  $x = y$  面で比較したものをそれぞれ図 11 と図 12 に示す。縦軸が  $\nabla\phi$  である。

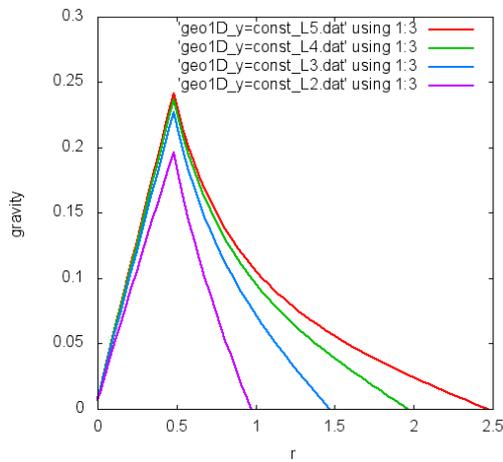


図 11:  $\nabla\phi : y = L/2$  面

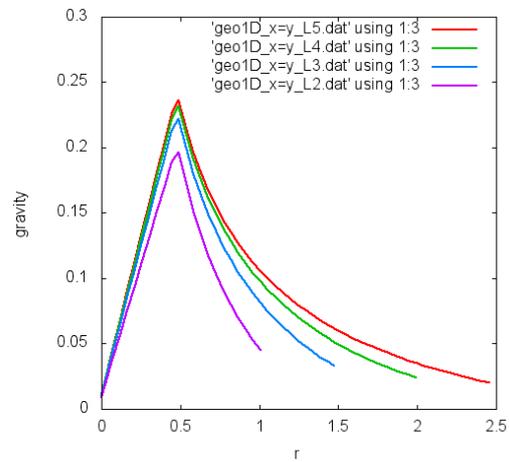


図 12:  $\nabla\phi : x = y$  面

図 11 から、 $y = L/2$  面の端点、すなわち計算領域の境界付近において、重力の強さが 0 となっている。周期境界条件下において、質点同士のちょうど中間点では重力が双方向に釣り合っていることを意味する。 $x = y$  面では端点での重力の強さは 0 となっておらず、周期  $L$  が短いほど強くなっている。これは質点同士が近いほど、各質点周りにおける重力の等方性が無くなることを意味する。また、両方の場合において周期  $L$  が長いほど全体に渡って重力が強くなることがわかる。この計算ではモデルとして、質点の配置密度によって各々の質点の作る重力がどのように変化するかを示しているのであり、質点が敷き詰められた領域が全体として作る重力を調べているわけではないため、必然的な結果である。

さらに図 11 を見ると、周期  $L = 2$  では重力の大きさが質的に異なっている。設定した物質分布 (86) に対して周期  $L = 2$  以下とすると、Newton 重力では隣の物質分布による重力の影響が強くなり、相殺し始めることがわかる。

## 6 シミュレーション方法

### 6.1 計算領域の設定

最大グリッド数は  $N = 71^3$  とし、周期境界条件を設定する際は図 13 のように対象の軸のみ短く閉じるように適用した。これは  $x$  軸のみに周期境界条件を置いた場合の例である。

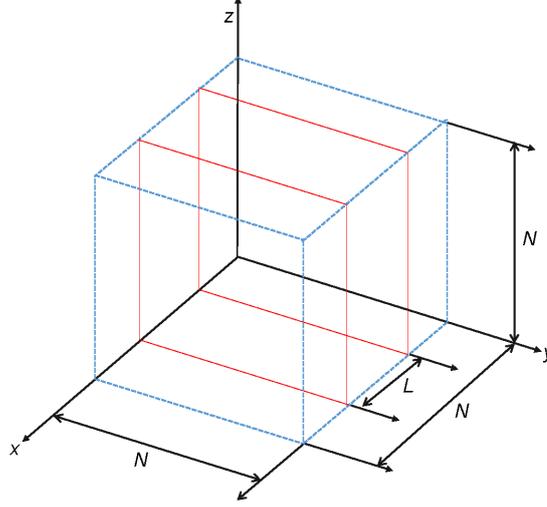


図 13: 周期境界条件を含む計算領域

ここで  $L$  の範囲を可変とし、その範囲で周期境界条件を設定する。はじめに全軸 Robin 境界条件としてブラックホールができることを確認し、以降の議論でそれをサイズの基準とする。その後、初期条件を統一して周期境界条件を適用する軸を 1 軸、2 軸、3 軸と変化させる。領域の中心に質点を配置し、物質分布  $\hat{\rho}$  は中心から  $r < 1.0$  の範囲で定数値与える。Hamiltonian constraint の計算と lapse 関数の計算においては、定数  $\kappa = 1$  とする単位系を用いた。

### 6.2 Hamiltonian constraint を解く

式 (62) を差分化し、

$$\psi_{new}(x, y, z) = \psi_{pre}(x, y, z) + \omega_1 (\bar{\psi}_{new}(x, y, z) - \psi_{pre}(x, y, z)) \quad (87)$$

$$\begin{aligned} 6\bar{\psi}_{new}(x, y, z) &= \psi_{pre}(x+h, y, z) + \psi_{pre}(x-h, y, z) \\ &+ \psi_{pre}(x, y+h, z) + \psi_{pre}(x, y-h, z) \\ &+ \psi_{pre}(x, y, z+h) + \psi_{pre}(x, y, z-h) + \frac{1}{4}\kappa h^2 \hat{\rho}_{i,j,k} \end{aligned} \quad (88)$$

を得る。SOR 法の加速パラメータ  $\omega_1 = 0.8$  と決め、残差  $10^{-4}$  で収束判定とした。ここで得られた  $\psi$  を使って、式 (63) および (64) によって空間の計量  $\gamma_{ij}$  と物質分布  $\rho$  を決定する。

### 6.3 lapse 関数を求める

計量の  $g_{tt}$  成分を決めるため、lapse 関数  $\alpha$  を Maximal slicing 条件で求める。一般座標系におけるラプラシアンは計量  $g^{ij}$  および  $g = \det(g_{ij})$  を用いて

$$D^i D_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (89)$$

と表されるので、式 (67) は

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \gamma^{ij} \sqrt{\gamma} \frac{\partial}{\partial x^j} \alpha \right) = \frac{1}{2} \kappa \rho \alpha \quad (90)$$

となるため、これを差分化する。  $\gamma^{ij}$  は  $i = j$  でのみ値を持つことから、

$$\alpha_{new}(x, y, z) = \alpha_{pre}(x, y, z) + \omega_2 \left( \frac{N(x, y, z)}{D(x, y, z)} - \alpha_{pre}(x, y, z) \right) \quad (91)$$

$$\begin{aligned} L(x, y, z) = & \gamma^{xx}(x, y, z) (\alpha_{pre}(x+h, y, z) + \alpha_{pre}(x-h, y, z)) \\ & + \gamma^{yy}(x, y, z) (\alpha_{pre}(x, y+h, z) + \alpha_{pre}(x, y-h, z)) \\ & + \gamma^{zz}(x, y, z) (\alpha_{pre}(x, y, z+h) + \alpha_{pre}(x, y, z-h)) \\ & + C_x(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} \alpha_{pre}(x, y, z) \\ & + C_y(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} \alpha_{pre}(x, y, z) \\ & + C_z(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z} \alpha_{pre}(x, y, z) \end{aligned} \quad (92)$$

と変形される。  $\alpha$  の掛からない部分

$$\begin{aligned} D(x, y, z) &= 2(\gamma^{xx}(x, y, z) + \gamma^{yy}(x, y, z) + \gamma^{zz}(x, y, z)) + \frac{1}{2}\kappa\rho(x, y, z)h^2 \\ C_x(x, y, z) &= \left( \frac{1}{f(x, y, z)}\gamma^{xx}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial x} \gamma^{xx}(x, y, z) \right) h^2 \\ C_y(x, y, z) &= \left( \frac{1}{f(x, y, z)}\gamma^{yy}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} \gamma^{yy}(x, y, z) \right) h^2 \\ C_z(x, y, z) &= \left( \frac{1}{f(x, y, z)}\gamma^{zz}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} \gamma^{zz}(x, y, z) \right) h^2 \end{aligned}$$

は予め計算しておく。ここで  $f = \sqrt{\gamma}$  である。また、SOR法の加速パラメータ  $\omega_2 = 0.01$  と決め、残差  $10^{-4}$  で収束判定とした。ここで得られた  $\alpha$  を使い、式 (49) の ADM 形式における計量から  $g_{tt} = -\alpha^2$  と求められる。

## 6.4 測地線方程式を解く

式 (25) の測地線方程式を Runge-Kutta 法で解くために、1 階の常微分方程式に分解する。

$$\frac{dx^a}{d\lambda} = u^a \quad (93)$$

$$\frac{du^a}{d\lambda} = -\Gamma_{ij}^a u^i u^j \quad (94)$$

これを解く上で、ステップ毎に光の場所の Christoffel 記号の値が必要になる。Christoffel 記号の値はグリッド点でしか求まっていないため、これをステップ毎に内挿する必要がある。また、 $u^t$  の計算には光の場合の 4 元ベクトル  $u_\mu u^\mu = 0$  の条件を用いるため、計量の値も同様に内挿する。

Christoffel 記号の値は計量  $g_{ij}$  および  $g^{ij}$  を用いて式 (24) で数値的に計算したほか、conformal factor  $\psi$  を使って計量  $g_{ij}$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{tt} & & & \\ & \psi^4 & & \\ & & \psi^4 & \\ & & & \psi^4 \end{bmatrix} \quad (95)$$

から  $\psi$  の式としても得られるため (付録 A)、誤差の観点からこれを用いた。Christoffel 記号と計量の内挿アルゴリズムには簡単な線形補完を用いる。次の図 14 のように、3 次元空間において 8 近傍を考える。

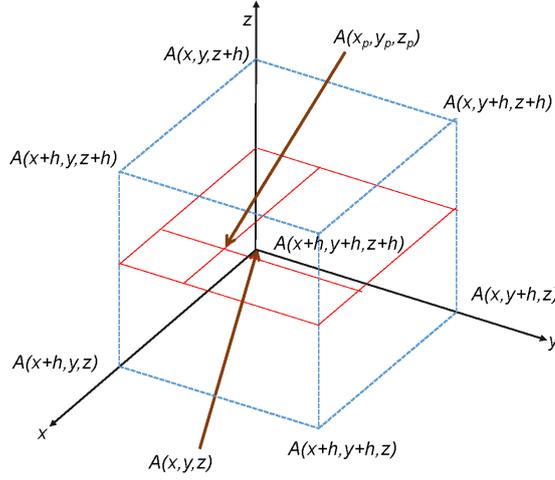


図 14: 3次元空間における値の線形補間

線形近似では、ある点  $(x_p, y_p, z_p)$  における位置の関数  $A_{x_p, y_p, z_p}$  は、その8近傍にあたる  $A_{x, y, z}$ ,  $A_{x+h, y, z}$ ,  $A_{x, y+h, z}$ ,  $A_{x+h, y+h, z}$ ,  $A_{x, y, z+h}$ ,  $A_{x+h, y, z+h}$ ,  $A_{x, y+h, z+h}$ ,  $A_{x+h, y+h, z+h}$  の値を使って、

$$d_x = \frac{(x_p - x)}{h} \quad (96)$$

$$d_y = \frac{(y_p - y)}{h} \quad (97)$$

$$d_z = \frac{(z_p - z)}{h} \quad (98)$$

$$A_{x_p, y_p, z_p} = d_z (d_y (d_x (A_{x+h, y+h, z+h}) + (1-d_x) (A_{x, y+h, z+h})) + (1-d_y) (d_x (A_{x+h, y, z+h}) + (1-d_x) (A_{x, y, z+h}))) + (1-d_z) (d_y (d_x (A_{x+h, y+h, z}) + (1-d_x) (A_{x, y+h, z})) + (1-d_y) (d_x (A_{x+h, y, z}) + (1-d_x) (A_{x, y, z}))) \quad (99)$$

と計算できる。

測地線方程式を解くコードを使って、光を放つても外側に出られなくなるような半径を探す。Eddington-Finkelstein 座標においてコードのテストを行った。厳密な計算結果である図 2 と同様の初期条件で実行した結果が図 15 である。

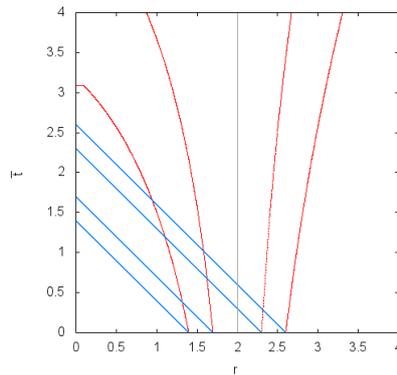


図 15: Eddington-Finkelstein 座標における光の軌跡

ここでは光が図 2 と同様の軌跡を辿り、 $r < 2$  から外側に放った光がそれ以上広がるできない様子を示すことができた。また、内側に放った光が 135 度の直線となることも確認できた。尚、シミュレーションにおいては Newton ポテンシャルと同形である式 (62) を解いて得られた解の勾配を計算し、これに沿った方向になるよう光の初速度を決定した。球殻状に光の初期位置を設定して、各点で外部に脱出できる境界にあたる半径を探し、これを事象の地平面と判定する。

## 6.5 軸対称ブラックホールの表面積を求める

$y$  軸のみに周期境界条件を設定したブラックホールにおいて表面積を計算するため、 $y$  軸について回転対称として表面積を求める。事象の地平面にあたる点の集合から、ある  $y$  の微小範囲における最も  $y$  軸からの距離の長い点を抽出し、 $r(y)$  とした。  $y$  方向の微小距離は  $\sqrt{g_{yy}}dy$  であるが、曲面で表面積が小さく計算されるので、 $dy$  を

$$\bar{d}y(y) = \sqrt{(r(y+dy) - r(y))^2 + dy^2} \quad (100)$$

と補正した。領域  $0 \leq y \leq L$  での表面積  $S$  は

$$S = 2\pi \sum_{y=0}^L \sqrt{g_{yy}}(y) \bar{d}y(y) \quad (101)$$

となる。球や円筒形でテストを行ったが、表面にあたる  $r(y)$  の値のばらつきによって正しい表面積より大きく計算されてしまった。  $r(y)$  を計算前に一度ソートし、変化を滑らかにすることでこの問題を解決した。

## 7 結果

境界条件の適用軸数および周期  $L$  を変えて計量を計算し、ブラックホールの判定を行った。本章では計算結果の図から一部のみを紹介するが、その他の図は付録 B に掲載する。

### 7.1 ブラックホール形状の変化

#### 0 軸周期境界条件

3 軸  $(x, y, z)$  すべてを Robin 境界条件と置いて計算を行った。下図はその  $z$  一定面である。  $x$  一定面および  $y$  一定面は  $z$  一定面と同形である。赤い点はそれが事象の地平面に属することを示す。

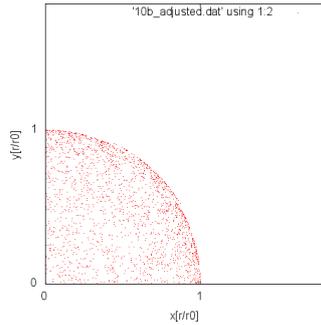


図 16:  $\varphi$  f

この条件では球対称のブラックホールとなることが確認できる。以降、このブラックホールの Schwarzschild 半径  $r_0$  および表面積  $S_0$  を使って周期  $L$  を  $L/r_0$ 、ブラックホールのサイズ  $r$  を  $r/r_0$ 、ブラックホールの表面積  $S$  を  $S/S_0$  と規格化する。

#### 1 軸周期境界条件

1 軸 ( $y$ ) に周期境界条件、2 軸 ( $x, z$ ) に Robin 境界条件と置いた場合。下図はその  $z$  一定面で、ブラックホールの変形が著しい区間である。  $x$  一定面は  $z$  一定面と同形である。  $y$  一定面は 3 軸を Robin 条件とした場合と同形である。

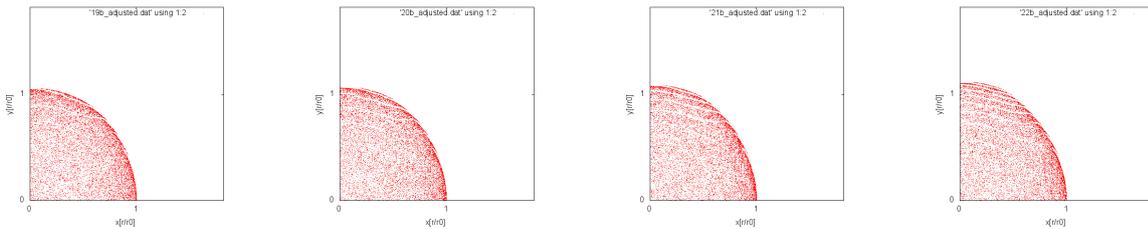


図 17:  $2.78[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 18:  $2.64[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 19:  $2.50[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 20:  $2.37[L/r_0]$ ,  $(x, y)$

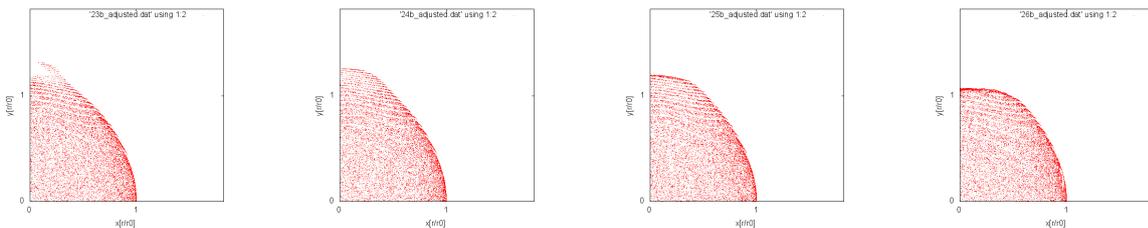


図 21:  $2.78[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 22:  $2.64[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 23:  $2.50[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 24:  $2.37[L/r_0]$ ,  $(x, y)$

図 21 で  $L/r_0 = 2.78$  となっているが、このあたりでブラックホール同士の先端が接近しており、ここから 2 つのブラックホールの境界面が平らに変化し始める。円柱に近い形状になると予想していたが、物質分布が球対称であるためか、これ以降さらに周期を短く設定しても円柱と呼べるほどには変形は進まなかった。時間発展を追い、物質の移動を考慮すれば結果は変わると考えられる。

## 2 軸周期境界条件

2 軸 ( $y, z$ ) に周期境界条件, 1 軸 ( $x$ ) に Robin 境界条件と置いた場合。下図は  $z$  一定面で, 1 軸に周期境界条件を設定した図 17~図 24 と対応する周期の図である。  $y$  一定面は  $z$  一定面と同形である。  $x$  一定面は次に 3 軸に周期境界条件を置いた場合とほぼ同形となるので, そちらで言及する。

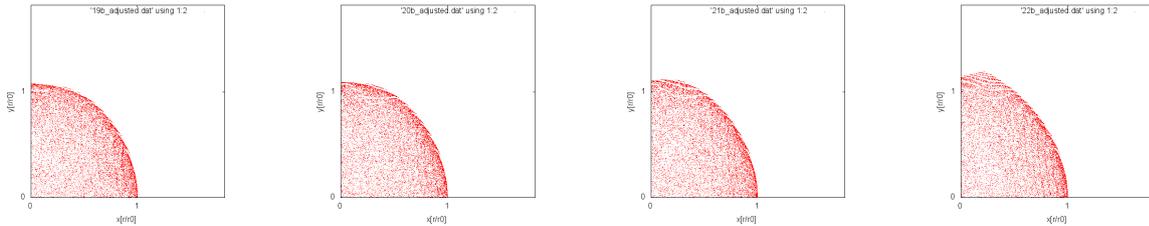


図 25:  $2.78[L/r_0], (x, y)$  図 26:  $2.64[L/r_0], (x, y)$  図 27:  $2.50[L/r_0], (x, y)$  図 28:  $2.37[L/r_0], (x, y)$

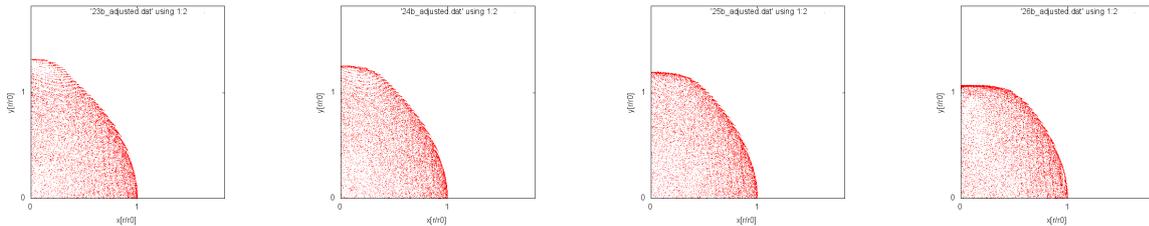


図 29:  $2.78[L/r_0], (x, y)$  図 30:  $2.64[L/r_0], (x, y)$  図 31:  $2.50[L/r_0], (x, y)$  図 32:  $2.37[L/r_0], (x, y)$

1 軸に周期境界を設定した場合と比較するとほぼ同じ形状であるが、ブラックホールの直径が周期に達するまで、すなわち図 25~図 28 は僅かながら周期境界条件を置いた  $y$  軸方向に大きく広がっている。これは  $z$  軸方向にもブラックホールが並んでいるため、その重力の影響が加わっていると考えられる。

## 3 軸周期境界条件

3 軸 ( $x, y, z$ ) すべてを周期境界条件と置いた場合。下図はその  $z$  一定面である。  $x$  一定面および  $y$  一定面は  $z$  一定面と同形である。

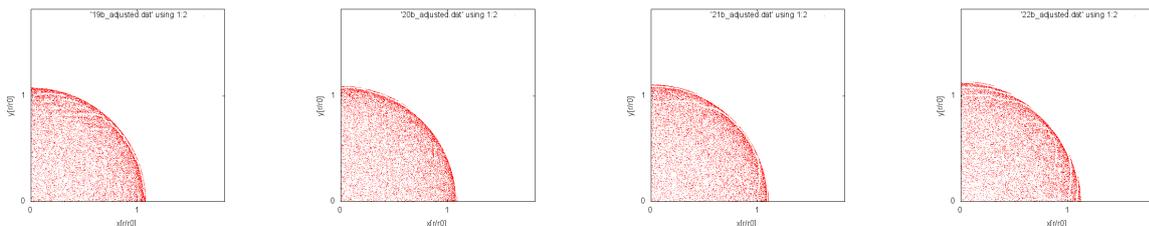


図 33:  $2.78[L/r_0], (x, y)$  図 34:  $2.64[L/r_0], (x, y)$  図 35:  $2.50[L/r_0], (x, y)$  図 36:  $2.37[L/r_0], (x, y)$

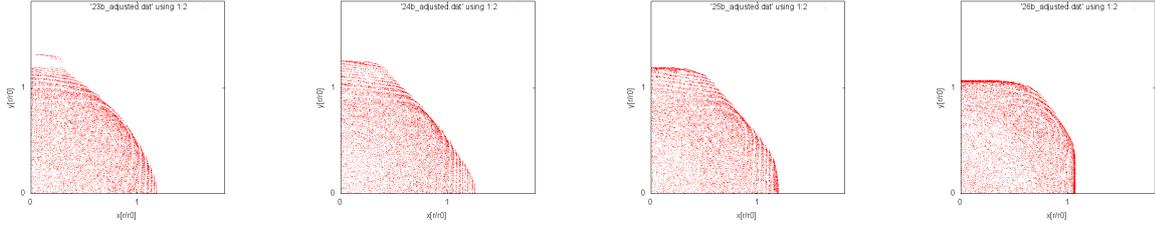


図 37:  $2.78[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 38:  $2.64[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 39:  $2.50[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 40:  $2.37[L/r_0]$ ,  $(x, y)$

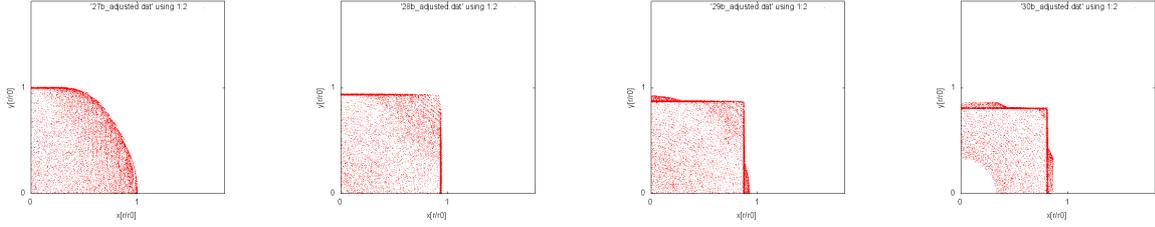


図 41:  $2.23[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 42:  $2.09[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 43:  $1.96[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 44:  $1.82[L/r_0]$ ,  $(x, y)$

図 37 の  $L/r_0 = 2.78$  あたりでブラックホールの形状が大きく変わる。また図 42 の  $L/r_0 = 2.09$  になると、ブラックホールの形状は頂点の尖った立方体状になる。この変遷をさらに細かく確認するには、グリッド数を上げて再度シミュレーションを行う必要がある。尚、図 43 および図 44 でブラックホール表面の凸部分は、物質分布が突き出ている部分にあたる。

いずれの場合においても、ブラックホール同士が完全に繋がることはなく、頂点が明瞭に現れるほどに歪んでも間隔が残されていた。表面の判定方法に問題がある可能性がある。周期境界条件を適用する軸を変えても、形状が大きく変わる周期は  $L/r_0 = 2.8$  程度と、ほぼ同じであった。その際、表面が凹状に曲がるため、このあたりで隣のブラックホールと繋がる現象が起きていると考えられる。事象の地平面を判定する過程において、光の初速は球対称時空であれば動径方向に設定すればよいが、一般の場合ではあらゆる向きに飛ばし、外部(漸近的に平坦な側)へ到達できる経路があるか調べる必要がある。シミュレーションでは Newton ポテンシャルの勾配方向にのみ設定して計算を簡略化しているため、これが正確性を損なう要素であると考えられる。但し、ある点で特定の向きに光を放って脱出判定になるならば複数の向きに放っても脱出判定になるはずであり、その場合にはブラックホールの表面は現状よりさらに小さく判定されるはずである。よって、ブラックホール同士の間隔の問題は光の向きを増やして試行することによって解決されないと考えられる。次に、事象の地平面の「所属」について考える。端点付近は光が脱出できると判定されているためにブラックホール同士が繋がらないが、結局そこから脱出した光は隣のブラックホールに落ちる軌跡をとると考えられるため、無限遠に到達することはできないと思われる。つまり、共通の事象の地平面は個別のそれを囲んでひとつに繋がっている可能性がある。長いステップで測地線方程式を解いて光の最終的な行方を計算することで、これを検証することができると考えられる。

## 7.2 ブラックホール表面積の変化

1 軸 ( $y$ ) に周期境界条件を設定した場合のブラックホールの配置周期  $L/r_0$  と表面積  $S/S_0$  の関係は、次の表 3 および図 45 のようになる。

表 3: 周期  $L/r_0$  と表面積  $S/S_0$

$L/r_0$	$S/S_0$	$L/r_0$	$S/S_0$	$L/r_0$	$S/S_0$
4.5537	1.0946	3.5974	1.2001	2.6412	1.5859
4.4171	1.1036	3.4608	1.2224	2.5046	1.6120
4.2805	1.1141	3.3242	1.2542	2.3679	1.6459
4.1439	1.1243	3.1876	1.2898	2.2313	1.6687
4.0073	1.1416	3.0510	1.3335	2.0947	1.6763
3.8707	1.1565	2.9144	1.3937	1.9581	1.7222
3.7341	1.1750	2.7778	1.5433	1.8215	1.7603

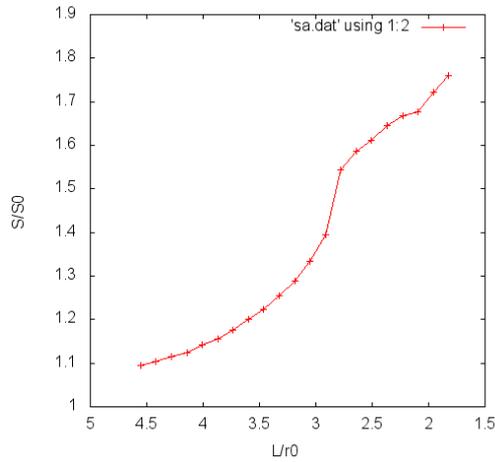


図 45: 周期  $L/r_0$  と表面積  $S/S_0$

表面積は周期境界条件を設定しない場合に比べると、 $L/r_0 = 4.5537$  の時点で既に  $S/S_0 = 1.0946$  となっており、その後単調増加している。ブラックホール同士が接近すると個別の表面積は広くなるという予想が示された。表面積は単位空間サイズあたりの質量  $M/L$  に関係すると考えられるが、Schwarzschild 計量において半径が  $r = 2M$  で決まることから類推すると、 $4\pi r^2$  で計算される球の表面積と同様、ブラックホールが球状の間は表面積  $S$  は  $M/L$  の 2 乗に比例すると考えられる。これは図 45 において  $L/r_0 = 5.0$  から  $L/r_0 = 2.8$  あたりまでの区間に相当する。本研究では軸対称のブラックホールを仮定して表面積の計算コードを作成しているため、2 軸以上に周期境界条件を設定したブラックホールでの計算は行っていない。この結果から、2 軸以上に周期境界条件を設定した場合は、周期に対する表面積の変化率はさらに大きくなると考えられる。具体的には適用軸が 2 軸の場合で  $M/L$  の 4 乗、3 軸では 6 乗のオーダーで増加すると予想される。

図 45 において  $L/r_0 = 2.8$  付近で表面積の増加傾向に変化が見られるが、このときのブラックホールの形状は図 21 にあたる。この時点からブラックホールの変形が顕著になり、球対称に近い形状から円柱に近い形状に大きく歪み始める。円筒であれば表面積は高さ  $h$  として  $2\pi rh$  で計算されるため、増加傾向は形状変化によって半径  $r$  にかかる次数が下がるために起こると考えられる。形状変化による影響を見るため、図 46 と図 47 を次に記す。図 46 はブラックホール表面の計量の平方根の平均値、図 47 はその値で表面積  $S/S_0$  を割った値である。これらの積が実際の表面積  $S/S_0$  である。

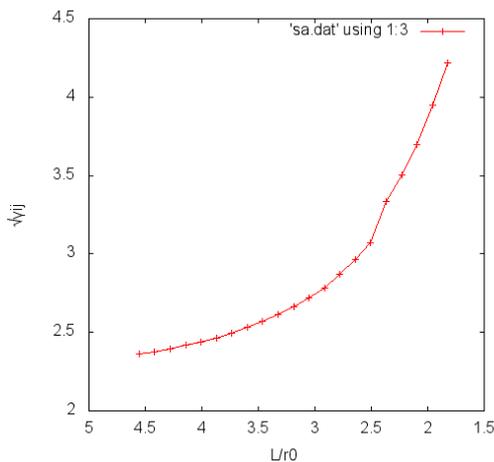


図 46: ブラックホール表面の計量の変化

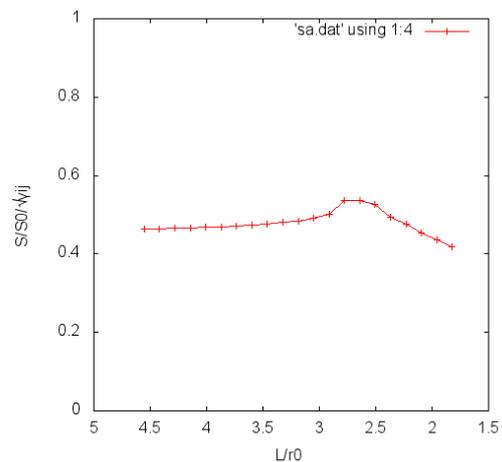


図 47: 見かけの表面積の変化

図 46 は計量の増加率を示した図であるが、この増加傾向がある程度保たれているのに対し、形状変化成分を示した図 47 は  $L/r_0 = 2.8$  以下で線形に減少している。これは単純に周期  $L$  がブラックホールの直径を超えるため、 $2\pi rh$  で計算される円柱の高さ  $h$  が小さくなって表面積が減少することと対応する。その場合でも計量の増加が勝るために表面積は増え続けている。  $L/r_0 = 2.5$  付近になるとグリッド数が 30 程度となっているので、表面積の変化をさらに細かいステップで高精度に追うため、グリッド数を増やして再度計算することが必要である。

### 7.3 計算時間の削減

シミュレーションでは計算領域の中心に物質分布を設定し、混在した境界条件のもとで解いている。得られる解は結局すべて軸対称となったので、鏡面对称境界条件を置くことで同じ解像度でも高速に計算を行える。Robin境界条件を設定した軸については、片側を鏡面对称境界条件と置くことは容易である。しかしながら、同じ軸で周期境界条件との混在を適当に実装できなかったため、統一のため前者もシミュレーションでは用いていない。本論文の楕円型偏微分方程式の差分化解法において最も高速化できる余地が残されているのはこの点である。また、SOR法を用いて解いたが、さらに高速化を見込める反復解法を用いることで計算時間を削減できるはずである。奇数グリッドと偶数グリッドに分けて更新するRed-Black法や、レベルを設けて低周波ノイズの緩和を高速にするマルチグリッド法が有効な方法である。また差分化解法において各グリッドの値はその近傍の値のみを参照して更新されるため、GPU等による並列計算が期待できる。

## 8 おわりに

本研究において、楕円形偏微分方程式である拘束条件式や座標条件を決定するための式を解くコードおよび、測地線方程式を解くコードを開発し、周期境界条件を設定する軸を変更したり周期を変えることで、形成されるブラックホールの形状に特徴的な違いがあることを確認できた。さらに、1軸に周期境界条件を設定したブラックホールの、周期による表面積変化についての結果を得ることができた。ブラックホールの変形が顕著になる周期からは、表面積の増加傾向が線形になるというシミュレーション結果は予想していないものであり、目的のひとつである表面積変化の様子を確認することは達成できたといえる。しかしながら、ブラックホール同士が合体してひとつになる様子は判定されなかった。第7章で述べている通り、事象の地平面の特定を行う手順にいくつか改善の余地があるため、これら修正項目の実装を今後の課題としたい。また、グリッド数の不足による影響が少ないとは言いきれないので、楕円形偏微分方程式の差分解法において計算領域を軸対称を利用して削減したり、さらに高速な解法を利用したりして、速度の向上を目指すべきである。コードの並列実行への最適化あるいは高速の求解ライブラリの利用も考えられる。

今後の発展として、本来の研究背景である高次元ブラックホールの解析のほか、物質の移動を含めるために時空の時間発展を行うことが挙げられる。

## 参考文献

- [1] 佐藤勝彦, 「相対性理論」, 2002, 岩波書店
- [2] 杉山直, 「相対性理論」, 2010, 講談社
- [3] 須藤靖, 「もうひとつの一般相対論入門」, 2010, 日本評論社
- [4] 杉浦洋, 「数値計算の基礎と応用 [新訂版]」, 1997, サイエンス社
- [5] リサ・ランドール, 「ワープする宇宙」, 2007, 日本放送出版協会
- [6] James B. Hartle, 「Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity」, 2003, Addison-Wesley
- [7] 真貝寿明, 「GRの初期値設定問題」, 2001
- [8] Steven Brandt, Bernd Bruggmann, 「A Simple Construction of Initial Data for Multiple Black Holes」, 1997, PhysRevLett.78.3606
- [9] Barak Kol, Evgeny Sorkin, and Tsvi Piran, 「Caged black holes: Black holes in compactified spacetimes. I. Theory」, 2004, doi:10.1103/PhysRevD.69.064031
- [10] Evgeny Sorkin, Barak Kol, and Tsvi Piran, 「Caged black holes: Black holes in compactified spacetimes. II. 5D numerical implementation」, 2004, doi:10.1103/PhysRevD.69.064032

## 付録 A

### 4次元計量

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{tt} & & & \\ & \psi^4 & & \\ & & \psi^4 & \\ & & & \psi^4 \end{bmatrix}$$

における Christoffel 記号の値は次のようになる.

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}^x &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{xy}^x &= 2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{yy}^x &= -2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\psi}{\psi} \\ \Gamma_{xz}^x &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{zz}^x &= -2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{tt}^x &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{g_{tt}}{2\psi^4} \\ \Gamma_{xx}^y &= -2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{xy}^y &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{yy}^y &= 2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\psi}{\psi} \\ \Gamma_{yz}^y &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{zz}^y &= -2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{tt}^y &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{g_{tt}}{2\psi^4} \\ \Gamma_{xx}^z &= -2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{yy}^z &= -2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{xz}^z &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\psi}{\psi} \\ \Gamma_{yz}^z &= 2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{zz}^z &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\psi}{\psi}, & \Gamma_{tt}^z &= -\frac{\partial}{\partial z} \frac{g_{tt}}{2\psi^4} \\ \Gamma_{xt}^t &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{g_{tt}}{2g_{tt}}, & \Gamma_{yt}^t &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{g_{tt}}{2g_{tt}}, & \Gamma_{zt}^t &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{g_{tt}}{2g_{tt}} \end{aligned}$$

# 付録 B

## ブラックホールの形状

### 1 軸周期境界条件

1 軸 ( $y$ ) に周期境界条件, 2 軸 ( $x, z$ ) に Robin 境界条件と置いた場合. 下図はその  $xy$  面への射影および  $xz$  面への射影である.  $yz$  面への射影は  $xy$  面への射影と同形である.

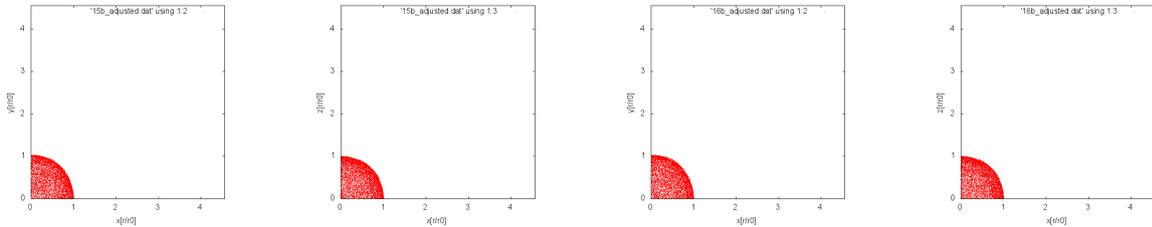


図 48:  $3.87[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 49:  $3.87[L/r_0]$ ,  $(x, z)$  図 50:  $3.73[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 51:  $3.73[L/r_0]$ ,  $(x, z)$

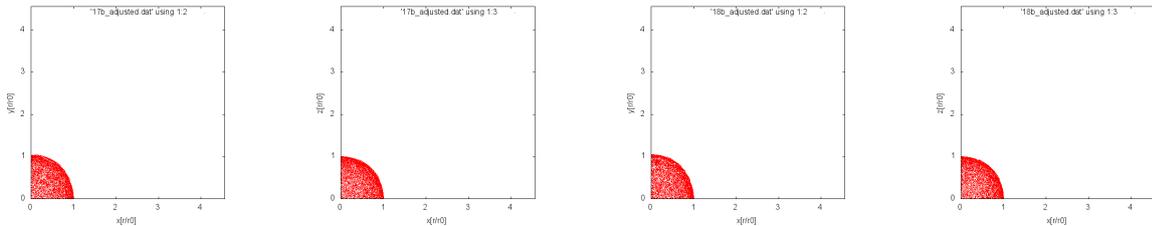


図 52:  $3.60[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 53:  $3.60[L/r_0]$ ,  $(x, z)$  図 54:  $3.46[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 55:  $3.46[L/r_0]$ ,  $(x, z)$

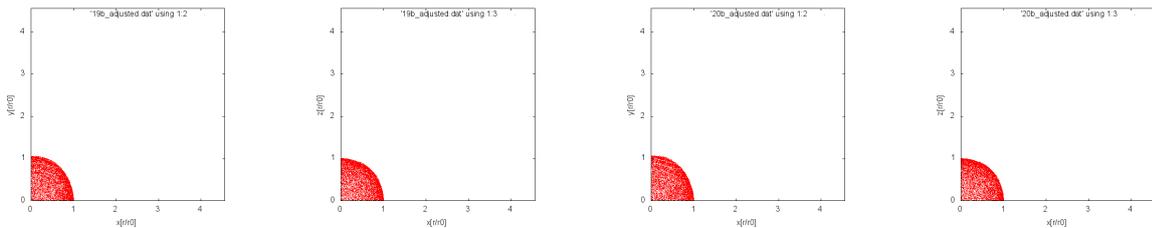


図 56:  $3.32[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 57:  $3.32[L/r_0]$ ,  $(x, z)$  図 58:  $3.19[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 59:  $3.19[L/r_0]$ ,  $(x, z)$

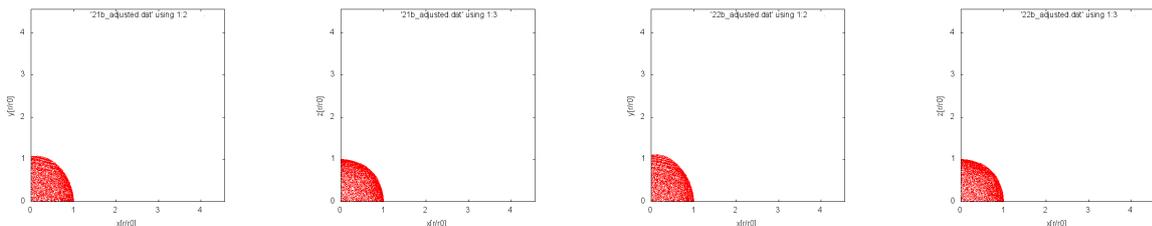


図 60:  $3.05[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 61:  $3.05[L/r_0]$ ,  $(x, z)$  図 62:  $2.91[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 63:  $2.91[L/r_0]$ ,  $(x, z)$

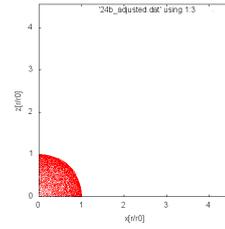
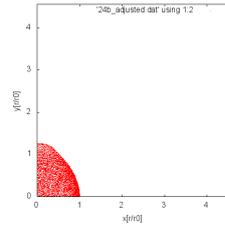
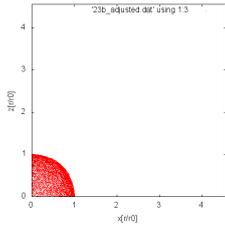
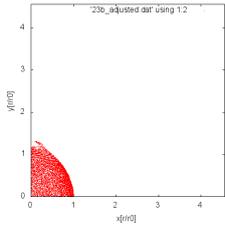


图 64:  $2.78[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 65:  $2.78[L/r_0]$ ,  $(x, z)$  图 66:  $2.64[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 67:  $2.64[L/r_0]$ ,  $(x, z)$

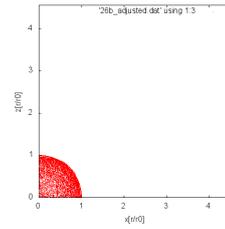
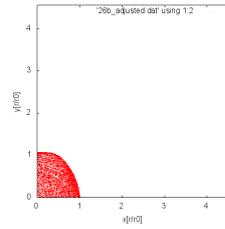
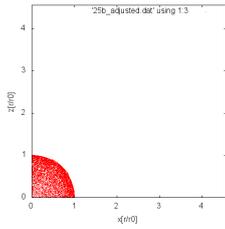
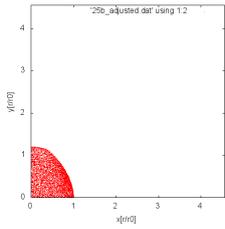


图 68:  $2.50[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 69:  $2.50[L/r_0]$ ,  $(x, z)$  图 70:  $2.37[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 71:  $2.37[L/r_0]$ ,  $(x, z)$

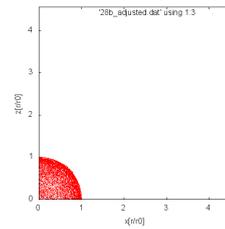
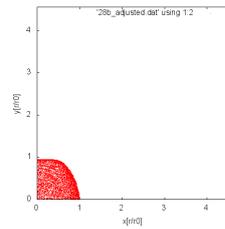
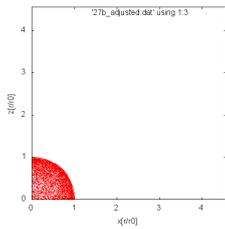
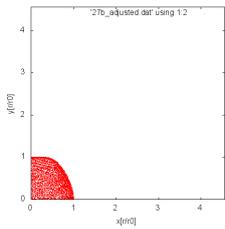


图 72:  $2.23[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 73:  $2.23[L/r_0]$ ,  $(x, z)$  图 74:  $2.09[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 75:  $2.09[L/r_0]$ ,  $(x, z)$

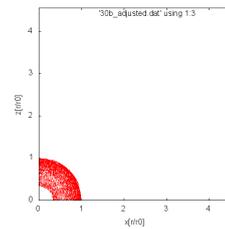
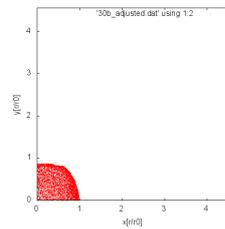
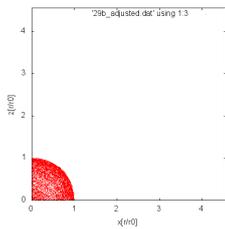
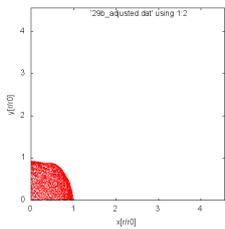


图 76:  $1.96[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 77:  $1.96[L/r_0]$ ,  $(x, z)$  图 78:  $1.82[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 79:  $1.82[L/r_0]$ ,  $(x, z)$

## 2 軸周期境界条件

2 軸 ( $y, z$ ) に周期境界条件, 1 軸 ( $x$ ) に Robin 境界条件と置いた場合. 下図はその  $xy$  面への射影および  $yz$  面への射影である.  $xz$  面への射影は  $xy$  面への射影と同形である.

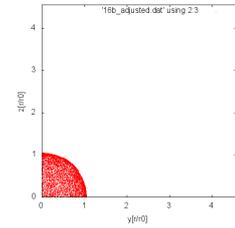
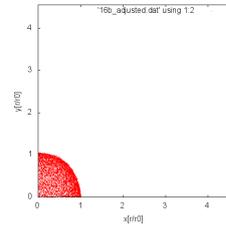
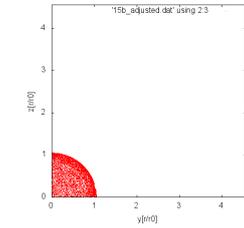
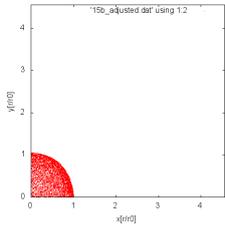


図 80:  $3.87[L/r_0]$ , ( $x, y$ ) 図 81:  $3.87[L/r_0]$ , ( $y, z$ ) 図 82:  $3.73[L/r_0]$ , ( $x, y$ ) 図 83:  $3.73[L/r_0]$ , ( $y, z$ )

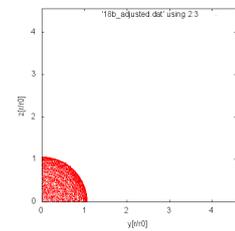
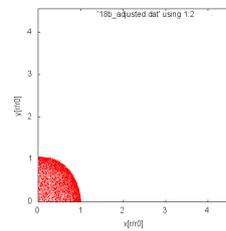
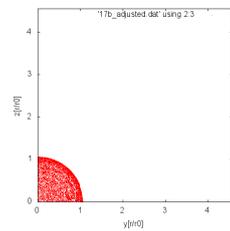
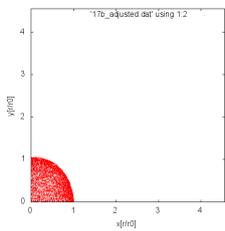


図 84:  $3.60[L/r_0]$ , ( $x, y$ ) 図 85:  $3.60[L/r_0]$ , ( $y, z$ ) 図 86:  $3.46[L/r_0]$ , ( $x, y$ ) 図 87:  $3.46[L/r_0]$ , ( $y, z$ )

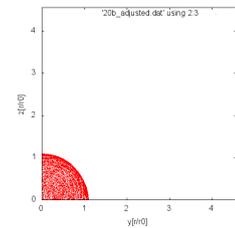
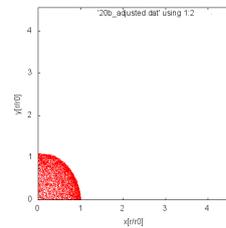
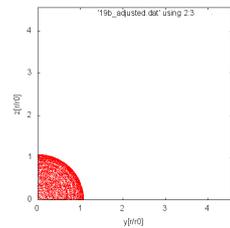
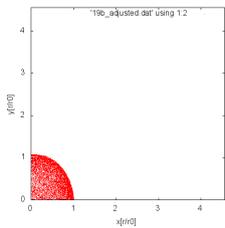


図 88:  $3.32[L/r_0]$ , ( $x, y$ ) 図 89:  $3.32[L/r_0]$ , ( $y, z$ ) 図 90:  $3.19[L/r_0]$ , ( $x, y$ ) 図 91:  $3.19[L/r_0]$ , ( $y, z$ )

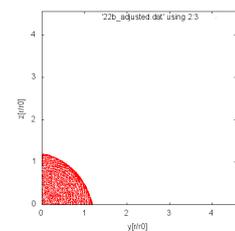
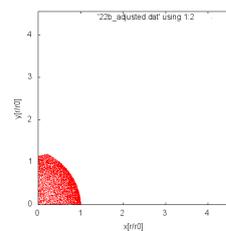
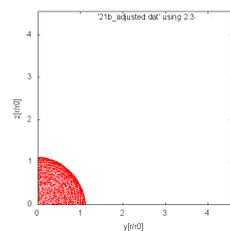
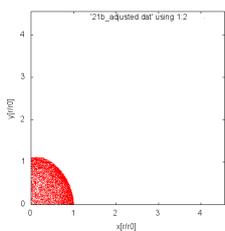


図 92:  $3.05[L/r_0]$ , ( $x, y$ ) 図 93:  $3.05[L/r_0]$ , ( $y, z$ ) 図 94:  $2.91[L/r_0]$ , ( $x, y$ ) 図 95:  $2.91[L/r_0]$ , ( $y, z$ )

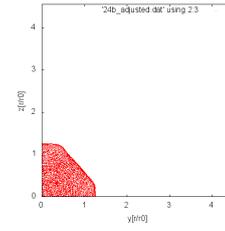
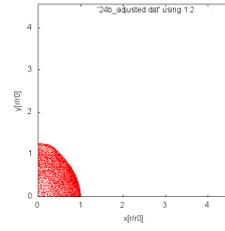
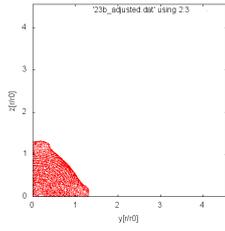
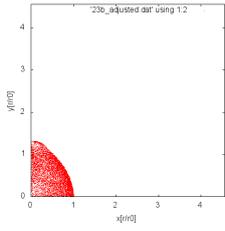


图 96:  $2.78[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 97:  $2.78[L/r_0]$ ,  $(y, z)$  图 98:  $2.64[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 99:  $2.64[L/r_0]$ ,  $(y, z)$

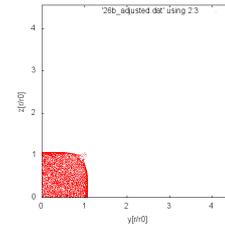
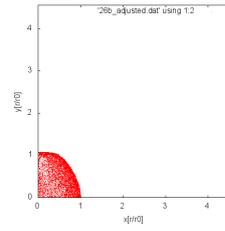
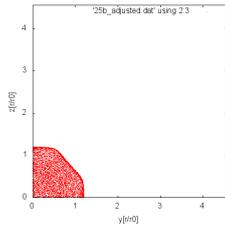
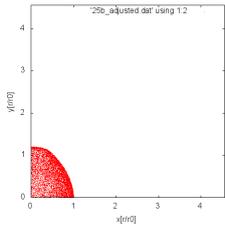


图 100:  $2.50[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 101:  $2.50[L/r_0]$ ,  $(y, z)$  图 102:  $2.37[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 103:  $2.37[L/r_0]$ ,  $(y, z)$

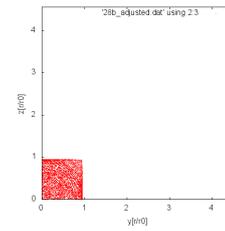
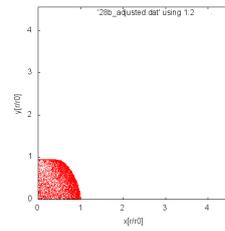
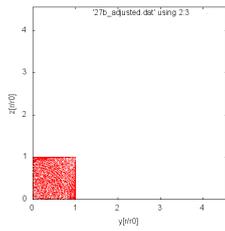
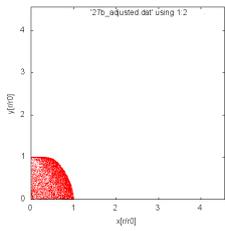


图 104:  $2.23[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 105:  $2.23[L/r_0]$ ,  $(y, z)$  图 106:  $2.09[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 107:  $2.09[L/r_0]$ ,  $(y, z)$

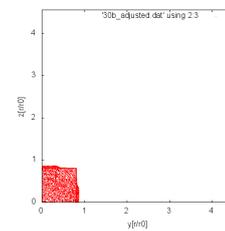
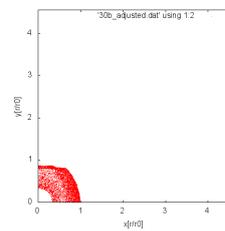
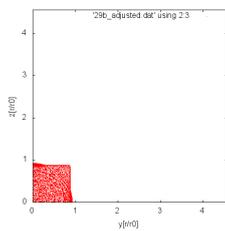
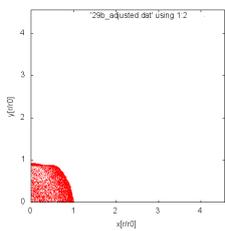


图 108:  $1.96[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 109:  $1.96[L/r_0]$ ,  $(y, z)$  图 110:  $1.82[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  图 111:  $1.82[L/r_0]$ ,  $(y, z)$

### 3 軸周期境界条件

3 軸  $(x, y, z)$  すべてを周期境界条件と置いた場合. 下図はその  $xy$  面への射影である.  $yz$  面および  $xz$  面への射影は  $xy$  面への射影と同形である.

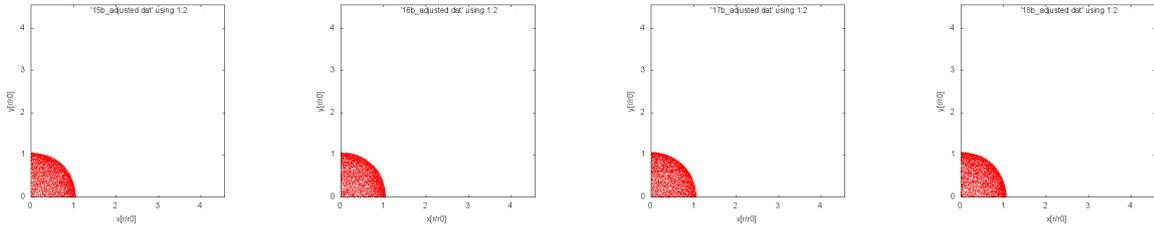


図 112:  $3.87[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 113:  $3.73[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 114:  $3.60[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 115:  $3.46[L/r_0]$ ,  $(x, y)$

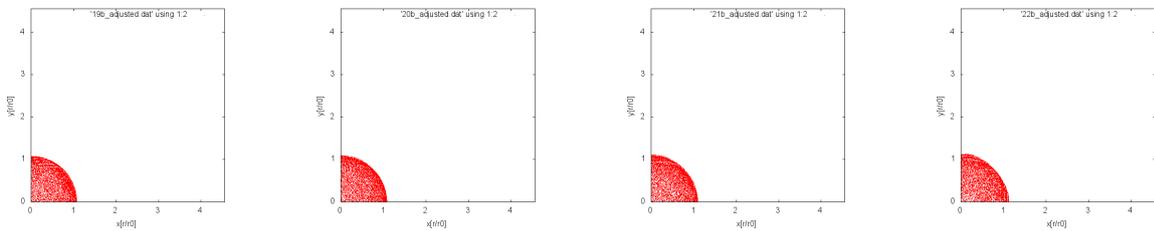


図 116:  $3.32[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 117:  $3.19[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 118:  $3.05[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 119:  $2.91[L/r_0]$ ,  $(x, y)$

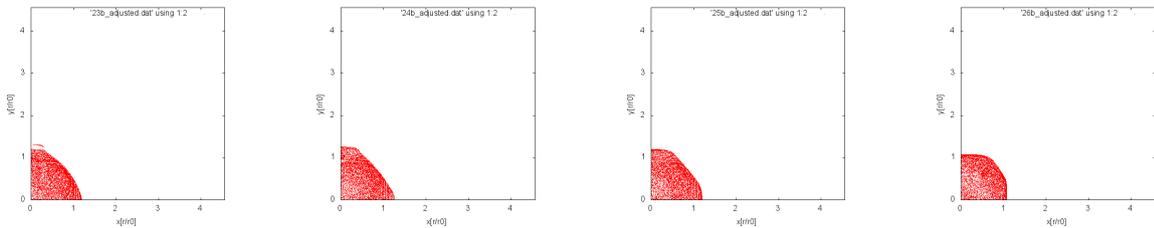


図 120:  $2.78[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 121:  $2.64[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 122:  $2.50[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 123:  $2.37[L/r_0]$ ,  $(x, y)$

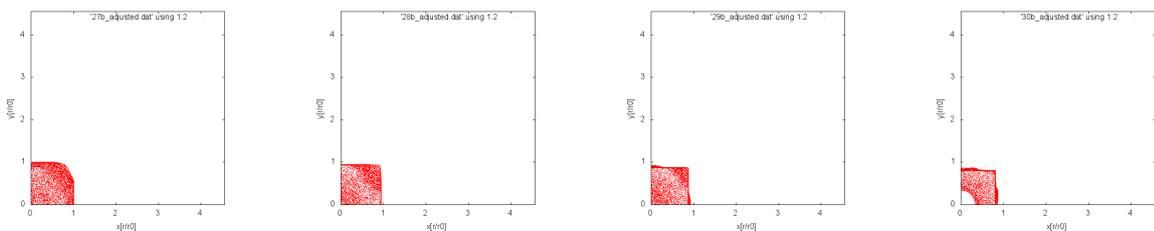


図 124:  $2.23[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 125:  $2.09[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 126:  $1.96[L/r_0]$ ,  $(x, y)$  図 127:  $1.82[L/r_0]$ ,  $(x, y)$