

# ポストニュートン近似を用いた天体の運動 ～水星の近日点移動と連星からの重力波放出～

B12-101 山本峻

平成 28 年 2 月 14 日

## 概要

一般相対性理論によれば時空は質量によって曲げられる。歪んだ時空での天体の運動はアインシュタイン方程式によって導かれるが、物質やエネルギーの分布から時空の歪みを記述するアインシュタイン方程式はあまりに複雑で、すべてを解くことは難しい。本研究ではアインシュタイン方程式の近似であるポストニュートン近似を用いて歪んだ空間での天体の運動を考える。さらには連星という一般相対性理論の影響から加速する天体について考え、重力波について計算することを目的とする。本研究では太陽系シミュレータを作成し、時空の歪みを含めて天体の運動を計算した。また連星について運動を計算することで重力波の波形を導いた。

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>3</b>
1.1	背景	3
1.2	目的	3
1.3	本稿の構成	4
<b>2</b>	<b>時空の歪みについて</b>	<b>5</b>
2.1	アインシュタイン方程式	5
2.2	水星の近日点移動	5
2.3	Hulse と Taylor の連星パルサー	7
<b>3</b>	<b>ポストニュートン近似</b>	<b>8</b>
3.1	太陽系	8
3.2	連星	8
<b>4</b>	<b>シミュレータの開発</b>	<b>9</b>
4.1	Runge-Kutta 法	9
4.2	無次元化	9
4.3	連星シミュレータ	10
4.4	太陽系シミュレータ	11
4.5	連星の初速度の設定	12
4.6	精度のチェック	13
4.6.1	精度について	14
4.6.2	太陽系の精度チェック	14
4.6.3	連星の精度チェック	15
4.7	重力波波形	15
<b>5</b>	<b>水星の近日点移動の再現</b>	<b>17</b>
5.1	Newton 重力での太陽系惑星の運動	17
5.2	PostNewton 項を含めた太陽系惑星の運動	18
<b>6</b>	<b>中性子星連星の合体と重力波</b>	<b>21</b>
6.1	連星の運動	21
6.2	エネルギー保存の確認	24
6.3	重力波波形	26
<b>7</b>	<b>まとめ</b>	<b>31</b>
7.1	結論	31
7.2	今後の展望	31

# 1 序論

## 1.1 背景

一般相対性理論によれば時空は質量に依って曲げられる。歪んだ時空での天体の運動はアインシュタイン方程式によって導かれるが、物質やエネルギーの分布から時空の歪みを記述するアインシュタイン方程式はあまりに複雑で、すべてを解くことは難しい。本研究ではアインシュタイン方程式の近似であるポストニュートン近似を用いて歪んだ空間での天体の運動を考える。さらには連星という質量が大きく加速運動をする天体について考え、観測されるであろう重力波について計算することを目的とする。

2015年是一般相対性理論が提唱されて100年を迎える。当時ニュートン力学はハレー彗星の再来や海王星の存在を予測するなど、ニュートン力学であらゆる運動が説明できると考えられていた。しかし後述する水星の近日点移動など、ニュートン力学では説明が難しい天体の運動も知られており、この問題に対して時空の歪みという驚くべき答えをだしたのがアインシュタインである。時間と空間は絶対のものではなくトランポリン膜のように伸びたり縮んだりするというのだ。時空の歪みを記述したアインシュタイン方程式はこれまで、ニュートン力学では説明が難しかった多くの現象について確かな精度で答えてきた。しかしその方程式は複雑で、現状では簡単な状況を仮定するか、あるいはコンピュータに計算をさせるしかなく、コンピュータに計算をさせるとしてもその計算量はあまりに膨大なものになってしまう。

本研究ではこのアインシュタイン方程式をすべて解くのではなく、その近似であるポストニュートン近似によって天体の運動を計算する。本研究では二つの星が互いを引っ張り合いながら運動する連星という天体について考えることで、加速度運動をし、重力波を放出するような状況についても考える。

日本の岐阜県にある重力波干渉計のKAGRAは2015年度内に試験運転を開始するとされており、近い将来重力波の結果が得られるのではないかと期待されている。しかし未だ直接観測したというデータはなく、ハルスとテイラーが発見した連星パルサーの状態から間接的に観測しただけというのが現状である。重力波の影響は非常に小さくアインシュタイン自身も発見は困難であると考えたほどである。アメリカではLIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) が運転を開始しており、2016年3月には最初の観測結果が発表される予定であるとされていたが、日本時間で2月12日正式に重力波の観測が発表された。[1] 世界各国でも大型重力波干渉計が始動するにあたり、その非常に小さい影響をとらえるために様々な改良が行われている。本研究では将来的に重力波から新しい物理現象や重力理論の検証を考える手段を開発することを目的として、ポストニュートン近似を用いて連星の運動を追い、放出される重力波の波形を計算する課題に取り組んだ。

## 1.2 目的

今回の計算の目的は歪んだ時空での天体の運動や放出される重力波の計算を行うことである。特に相対論的な影響が強く現れる中性子星の連星を考え、また光速で時空の歪みが伝搬する重力波についても考え、天体から放たれる重力波波形を計算する。中性子星-中性子星の連星は現在稼働中の等で観測可能な重力波源の有力な候補だと考えられており、この連星について計算することで現実的な重力波のデータが得られるといえる。

### 1.3 本稿の構成

本論文の構成は以下のとおりである。

2章ではアインシュタイン方程式等について説明する。

3章では今回用いるポストニュートン近似について説明する。

4章では今回作成した連星シミュレータについて述べる。

5章では水星の近日点移動を再現した結果について述べる。

6章では連星の運動の結果について述べる。

## 2 時空の歪みについて

### 2.1 アインシュタイン方程式

一般相対性理論は1915年にアインシュタインによって提唱された理論であり、1905年に発表した特殊相対性理論について加速度を扱えるように拡張した理論である。特殊相対性理論は慣性系において物理法則が座標系に依存しないという特殊相対性原理を取り扱っていたが、一般相対性理論ではこれを加速運動している座標系についても含んでいる。アインシュタインは自由落下の思考実験から重力は局所的に消せると考えた。重力にひきつけられて落下している座標系を考えると、座標系が重力加速度  $g$  で落下し、座標系と同様に落下する質量  $m$  の物体と静止した観測者を考える。物体は  $mg$  で落下するが、観測者から見れば上向きの慣性力  $mg$  が働くため、重力以外に力が働いていなければ運動方程式は

$$m_I \frac{d^2 x}{dt^2} = -m_G g (\text{重力}) + m_I g (\text{慣性力}) = 0 \quad (1)$$

となる。つまり座標系からみれば重力が慣性力と釣り合って、重力が消えたように見える。小さな領域では重力と加速度運動は相殺できるということである。しかし式(1)が成立するためには重力質量  $m_G$  と慣性質量  $m_I$  が等しくなければならない。一般相対性理論では重力場での運動は測地線によって与えられ、測地線の方程式は質量に依らない。測地線とは計量がユークリッド的でない、すなわち時空間の最短経路である。ニュートンの万有引力はその運動こそ明らかであったが、なぜ万有引力が発生するのかという問いは考えないものとした。アインシュタインはこの問題に対して重いものの周りでは空間が歪むからだと答えた。重力の効果を時空の歪みとして表したのである。アインシュタイン方程式は一般相対性理論での重力の記述であり、エネルギーや物質の分布を表すエネルギー運動量テンソルと時空の歪みを表すアインシュタインテンソルを結び付けたものである。このアインシュタイン方程式は重力場の方程式とも呼ばれる。式は

$$G_{\mu\nu} \left( = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2)$$
$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

であらわされ、 $R_{\mu\nu}$  はリッチテンソル、 $R$  はリッチスカラー、 $g_{\mu\nu}$  は計量テンソル、 $G$  はNewtonの万有引力定数、 $c$  は光速、 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルである。 $G_{\mu\nu}$  はアインシュタインテンソルと呼ばれる。また  $\mu\nu$  は0, 1, 2, 3の値をとり、空間成分を表す。時空の伸び縮みをあらかず計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  は  $4 \times 4$  で16の成分を持つが、 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  なので独立な成分は10個になる。

アインシュタイン方程式は重力場での重力の法則であるから、この式(2)について弱い重力場を考えればNewtonの万有引力に近似する。

### 2.2 水星の近日点移動

ニュートン力学では説明できなかった天体の現象の一つに水星の近日点移動がある。太陽系の惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く運動をしている。これはケプラーの第1法則で

ある。この各惑星の楕円軌道上で、太陽に最も近くなる点を近日点と呼ぶ（太陽に最も近くなる点なので近日点と呼び、反対に軌道上で最も太陽から遠くなる点は遠日点と呼ばれる。本研究で扱う連星についても同様にお互いが最も近くなる点が存在し、これは近星点と呼ばれる）。しかし特に厳密に観測すると惑星は同じ軌道を描き続けるわけではない。特に水星に注目すると、近日点は100年間で574秒角ずれる。この近日点の主な原因は他の太陽系惑星の万有引力である。太陽に引っ張られて周回する中で、他の惑星の影響で少しずつずれが発生するのである。しかし、ニュートン力学での万有引力のみを考慮して計算すると、実際に発生する近日点移動と43秒角だけ計算が一致しなかった。万有引力のみの力の場合水星の内側にバルカンという未知の惑星を仮定することで解決を図ったが、アインシュタインは時空の歪みを用いて説明した。前述した通り、重いものの周りでは時空が歪められてしまう。水星は太陽に近い位置にあるため、太陽が空間を歪めた影響を受けてしまうと考えたのである。

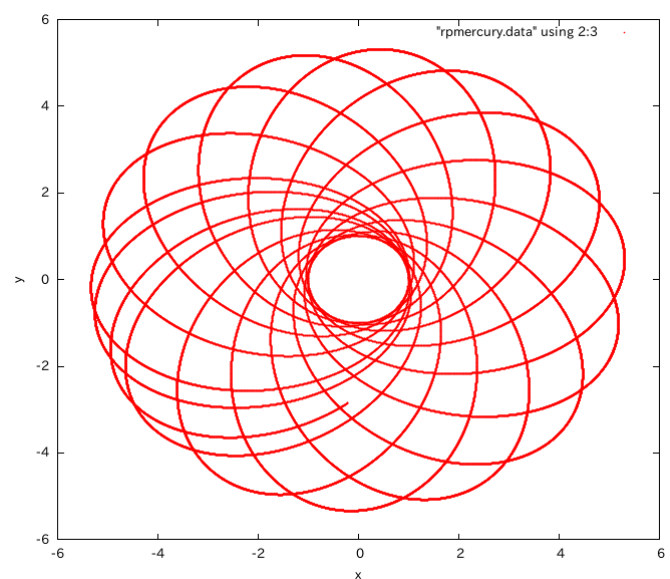


図 1: 誇張して描いた近日点移動

実際の近日点のずれは厳密に述べると、ニュートン力学の影響のみを用いて計算した場合のずれが531.4秒角、観測値とのずれが42.7秒角に対して一般相対性理論から計算される値が42.9秒角の移動になる。この計算の結果から相対性理論が確かめられた。

図1は本稿で述べる連星シミュレータを用いて水星の近日点移動をあらわした図である。後述するように Post-Newton の補正項は天体の速度  $v$  と光速  $c$  に対して  $\frac{v}{c}$  で影響するが、この図ではその補正項を0.1、つまり光速の  $\frac{1}{10}$  の速度で受けるほどの影響を与えている。

### 2.3 Hulse と Taylor の連星パルサー

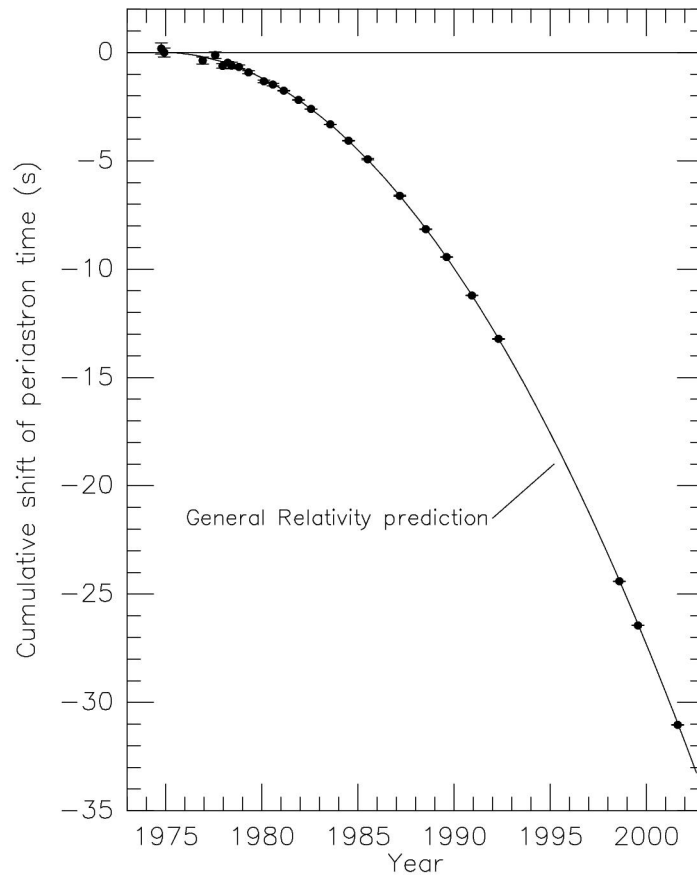


図 2: PSR B1913+16 の周期の変化 [4]

重力波を直接観測した例はいまだに無いが，間接的に最初に発見されたのは連星パルサーの観測からである．連星パルサーとはパルスを放ちながら連星の運動を行う天体であり，図 2 は Hulse と Taylor が発見した連星 PSR B1913+16 の周期の変化である．横軸は時間変化（年），縦軸が周期をあらわしている．時間とともに周期がだんだん短くなり，またその変化が相対論の予測と一致している．図の点は実際に観測された各年の周期のずれの蓄積であり，線は一般相対性理論から予測される周期の変化である．重力波を放ちながらエネルギーを失い，加速し，周期が短くなっている．

### 3 ポストニュートン近似

ポストニュートン近似はアインシュタイン方程式の弱い重力場での近似である。アインシュタイン方程式をすべて解かずに、天体の速度  $v$  と光速  $c$  の比  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  を展開パラメータとして近似する方法である。Newton の万有引力の項（以下、N と記載）にポストニュートン近似 1 次の項である Post-Newton の項（PN）、2 次の項 Post<sup>2</sup>-Newton（以下 2 PN）、2.5 次の項 Radiation Reaction（以下 RR）と補正項を加えていく。Radiation Reaction は放射反作用、すなわち重力波を放つことでエネルギーを失っていく影響である。

#### 3.1 太陽系

太陽系では時空の歪みはほとんど影響せず、水星の近日点移動においてもその影響がわずかにみられる程度である。そのため万有引力に PN の 1 次の項のみを加えて水星の近日点移動を再現した。またエネルギーおよび角運動量の保存の観点から数値の正しさを確認したが、PN の影響は十分に小さいと考えて、万有引力のみ考慮した。用いた数式等については 4 章で述べる。

#### 3.2 連星

今回の問題では天体を質点として扱っているため、1.5 次の項 Spin-orbit、2 次の項 Spin-spin の項は含めていない。今回は 2.5 次の項である RR までを議論する。本研究の目的は近似式の導出でなく、歪んだ時空での天体の数値シミュレーションであるので参考文献 [2] より得られる式を用いてその様子を確認した。今回用いた加速度、力学的エネルギーおよび角運動量の式は 4 章で述べる。



## 4 シミュレータの開発

連星の運動および重力波を考えるために連星シミュレータを作成した。またこのシミュレータを用いて、パラメータを調整することで水星の近日点の再現も行った。今回はプログラミングにC言語を使用している。また微分方程式を解くための手法としてはRunge-Kutta法を用いた。Runge-Kutta法および無次元化についても本章で述べる。

### 4.1 Runge-Kutta法

惑星間の運動を考えるにあたって常微分方程式を解く必要があるが、近日点のずれがごく微小であるため高い精度が必要となる。このため本研究では以下で述べる4次精度のRunge-Kutta法を使用する。Runge-Kutta法はEuler法のように1ステップ進む際に何段階かに分ける方法である。すなわち

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

を解くにあたり、今回は4次精度であるので、点 $(x_n, y_n)$ から次の点 $x_{n+1} = x_n + \Delta x$ における $y_{n+1}$ の値を求める場合、

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= \Delta x \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 &= \Delta x \cdot f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= \Delta x \cdot f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x, y_n + k_3) \end{aligned} \quad (4)$$

として4段階のステップに分けて解く。また運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm \mathbf{r}}{r^2} \quad (5)$$

は2階の微分方程式なので、1階の微分方程式を解くRunge-Kutta法では解けない。そのため

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -G \frac{M \mathbf{r}}{r^2} \end{aligned}$$

と1階の常微分方程式の連立として解く。なお上記の式において $M$ および $m$ はそれぞれ引力で引く側の天体の質量と引かれる側の天体の質量、 $r$ は二体の天体の距離、 $t$ は時間を表す。

### 4.2 無次元化

本研究を行うにあたって連星シミュレータでは中性子星を例として扱い、その速度は相対論的影響を考慮するほどに速い。また近日点移動の再現でも太陽を用いる。中性子星の典型的な質量は $1 \sim 2M_\odot$ 。そのため星1体が質量を1太陽質量 $M_\odot$ である。程度を持っていると考える。しか

し  $M_{\odot}$  は  $10^{33}kg$  と非常に大きい値であり、これらの値をそのまま MKS 単位系等として扱うことは難しく、プログラムに適さない。よってシミュレータでは、次の諸量を用いて無次元化した。

水星の近日点移動の再現にあたっては  $M_{\odot}(= 1.989 \times 10^{33}[g]) = 1 \times 10^0$ ，光速  $c(= 2.997924562 \times 10^{10}[cm/sec]) = 1 \times 10^4$ ，万有引力定数  $G(= 6.673 \times 10^{-8}[cm^3/g \cdot sec^2]) = 1 \times 10^3$  として決定した。

$$\begin{aligned} 1[Length] &= 147677559.733628422021866[m] \\ 1[Mass] &= 1.989 \times 10^{33}[g] \\ 1[Time] &= 4925.993188938302410[sec] \end{aligned}$$

連星シミュレータでは  $M_{\odot}(= 1.989 \times 10^{33}[g]) = 1[Mass]$ ，光速  $c(= 2.997924562 \times 10^{10}[cm/sec]) = 1$ ，万有引力定数  $G(= 6.673 \times 10^{-8}[cm^3/g \cdot sec^2]) = 10^{-1}$  として、その値から  $1[Length]$ ， $1[Time]$  を決定した。

$$\begin{aligned} 1[Length] &= 14767.755973[m] \\ 1[Mass] &= 1.989 \times 10^{33}[g] \\ 1[Time] &= 0.00049[sec] \end{aligned}$$

### 4.3 連星シミュレータ

連星シミュレータを作成するにあたって文献 [2] より重力を受けて得る加速度を計算した。 $\mathbf{a}_N$  は Newton の万有引力の加速度であり、以下各項は 3 章で述べた通り、加速度の各補正項である。

なお以下で用いる記号の意味は  $m = m_1 + m_2$ ， $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ， $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ ， $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ ， $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m}$ ， $\eta \equiv \frac{\mu}{m}$ ， $\mathbf{L}_N = \mu \mathbf{x} \times \mathbf{v}$  であり、 $r$  は二体間の距離、 $m_1, m_2$  は各天体の質量、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  は各天体の位置をあらわす。

$$\mathbf{a}_N = -G \frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{n}} \quad (6)$$

$$\mathbf{a}_{PN}^{(1)} = -Gc^{-2} \frac{m}{r^2} \left\{ \hat{\mathbf{n}} \left[ -2G(2 + \eta) \frac{m}{r} + (1 + 3\eta)v^2 - \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2 \right] - 2(2 - \eta)\dot{r}\mathbf{v} \right\} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{2PN}^{(2)} &= -Gc^4 \frac{m}{r^2} \left\{ \hat{\mathbf{n}} \left[ \frac{3}{4}G^2(12 + 29\eta) \left( \frac{m}{r} \right)^2 + \eta(3 - 4\eta)v^4 + \frac{15}{8}\eta(1 - 3\eta)\dot{r}^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{2}\eta(3 - 4\eta)v^2\dot{r}^2 - \frac{1}{2}G\eta(13 - 4\eta) \frac{m}{r} v^2 - G(2 + 25\eta + 2\eta^2) \frac{m}{r} \dot{r}^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\dot{r}\mathbf{v} \left[ \eta(15 + 4\eta)v^2 - G(4 + 41\eta + 8\eta^2) \frac{m}{r} - 3\eta(3 + 2\eta)\dot{r}^2 \right] \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_{RR}^{(5/2)} = \frac{8}{5}G^3c^{-9}\eta \frac{m^2}{r^3} \left\{ \dot{r}\hat{\mathbf{n}} \left[ 18v^2 + \frac{2}{3}G \frac{m}{r} - 25\dot{r}^2 \right] - \mathbf{v} \left[ 6v^2 - 2G \frac{m}{r} - 15\dot{r}^2 \right] \right\} \quad (9)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_{PN}^{(1)} + \mathbf{a}_{2PN}^{(2)} + \mathbf{a}_{RR}^{(5/2)} \quad (10)$$

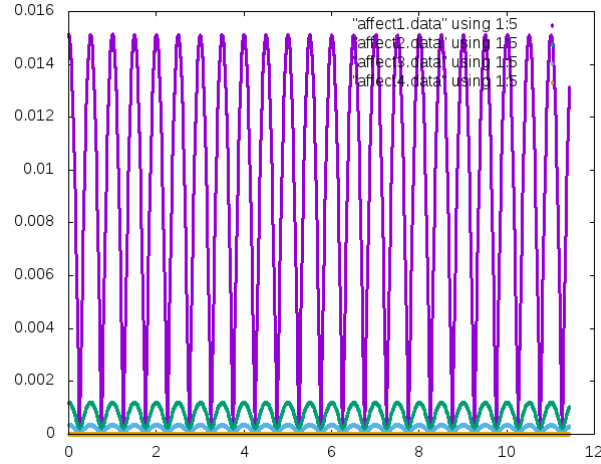


図 3: 連星シミュレータでの PostNewton の各項の影響割合 (横軸:時間 [周], 縦軸:各項の加速度)  
(紫:Newton 緑:PN 青:2PN 黄:RR)

図 3 は後述する連星シミュレータの場合において PostNewton の各項の大きさである。

#### 4.4 太陽系シミュレータ

作成する連星シミュレータを用いて二体以上の運動について考える。太陽系の問題においては多体問題のため、連星の計算で用いた二体間の運動ではなく以下の式を使用する。 $\mathbf{a}_N$  および  $\mathbf{a}_{PN}$  は連星シミュレータ同様、Newton あるいは PN の補正項である。水星の近日点移動は PN の項までの補正を使用する。

$$\mathbf{a}_N = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{n}} \quad (11)$$

$$\mathbf{a}_{PN} = -G \frac{Mm}{r^2} \left\{ \hat{\mathbf{n}} \left[ -2(2 + \eta) \frac{m}{r} + (1 + 3\eta) v^2 - \frac{3}{2} \eta \dot{r}^2 \right] - 2(2 - \eta) \dot{r} \mathbf{v} \right\} \quad (12)$$

また各天体の質量, 初期位置, および初速度は以下の通りである。このデータは海上保安庁の天体位置表の基礎理論より 2000 年 1 月 15 日 (JD245 1545.0) のデータを使用した。また元データは地球一月重心であるが今回は月を取り扱っていないため、地球のデータとして使用した。

表 1: 太陽と各惑星の質量比

天体	質量比
太陽	1
水星	1/6023600
金星	1/408523.5
地球	1/332946
火星	1/3098710
木星	1/1047.355
土星	1/3498.5
天王星	1/22869
海王星	1/15384615

表 2: 太陽と各惑星の位置 (2000 年 1 月 15 日) (単位は天文単位, 出典 [11])

天体	x	y	z
太陽	0.0	0.0	0.0
水星	$3.57260210116393307 \times 10^{-1}$	$-9.15490653439599777 \times 10^{-2}$	$-8.59810040909753347 \times 10^{-2}$
金星	$6.08249427846959175 \times 10^{-1}$	$-3.49132461247222068 \times 10^{-1}$	$-1.95543325598951117 \times 10^{-1}$
地球-月重心	$1.16014890773445938 \times 10^{-1}$	$-9.26605561119449546 \times 10^{-1}$	$-4.01860265309107119 \times 10^{-1}$
火星	$-1.14688604721959430 \times 10^{-1}$	$-1.32836652799608780 \times 10^0$	$-6.06155187159714218 \times 10^{-1}$
木星	$-5.38420838221841080 \times 10^0$	$-8.31249563803942312 \times 10^{-1}$	$-2.25097916041175972 \times 10^{-1}$
土星	$7.88988979313137768 \times 10^0$	$4.59570989041730221 \times 10^0$	$1.55842923981821194 \times 10^0$
天王星	$-1.82698923303283768 \times 10^1$	$-1.16273272216672681 \times 10^0$	$-2.50376293926411328 \times 10^{-1}$
海王星	$-1.60595036184053904 \times 10^1$	$-2.39429387558886729 \times 10^1$	$-9.40042691455228219 \times 10^0$

表 3: 太陽と各惑星の速度 (2000 年 1 月 15 日) (単位は天文単位, 単位は天文距離/日, 出典 [11])

天体	x	y	z
太陽	0.0	0.0	0.0
水星	$3.36784590399568307 \times 10^{-3}$	$2.48893427316145851 \times 10^{-2}$	$1.29440715985639891 \times 10^{-2}$
金星	$1.09524203791787341 \times 10^{-2}$	$1.56125066000425059 \times 10^{-2}$	$6.32887644177850702 \times 10^{-3}$
地球-月重心	$1.68116200916073065 \times 10^{-2}$	$1.74313078597218426 \times 10^{-3}$	$7.59975082097443755 \times 10^{-4}$
火星	$1.44820048646458250 \times 10^{-2}$	$2.37284766578002322 \times 10^{-4}$	$-2.83748752159435622 \times 10^{-4}$
木星	$1.09236678329474741 \times 10^{-3}$	$-6.52329436574498998 \times 10^{-3}$	$-2.82301229501759634 \times 10^{-3}$
土星	$-3.21720537449760197 \times 10^{-3}$	$4.33063193895728815 \times 10^{-3}$	$1.92641674048135337 \times 10^{-3}$
天王星	$2.21545069336107442 \times 10^{-4}$	$-3.76765490624879232 \times 10^{-3}$	$-1.65324429023773109 \times 10^{-3}$
海王星	$2.64312527755543283 \times 10^{-3}$	$-1.50348746089858512 \times 10^{-3}$	$-6.81268749696571339 \times 10^{-4}$

#### 4.5 連星の初速度の設定

今回の計算は問題を簡単にするため連星 1 および 2 について質量を 1 : 1 とし, また二体間の距離を 50km とした. 連星の軌道は重力波放出によって円軌道となることが示されている. そこで本研究でも離れた地点で円運動している連星を初期条件とした.

初速度について, Newton の万有引力のみを考えた場合については円運動等の式から初速度を計算した. 連星 1 及び 2 に対して双方ともに初期値として  $y=0, z=0$  とし, §4.2 で述べた通り, 単位系を変更しているのので,  $x$  の初期値を  $50[km]/14767.755973[m] = 3.385755$  の半分,

$x = 1.693$  として与えた。

PNについても補正項を加えたうえで円運動の式から算出した（万有引力のみの場合より遅くなる）。より高次の場合にも Post-Newton の初速度で代用した。

中性子星の半径は 10-15km 程度であるが、今回は星の半径については考えていない。星同士が接触する場合についても考えていないが、RR の項までの近似では接触する前に近似が十分でない状態（速度が速すぎる）が発生するので、今回は無視する。自転について無視し、質点として扱う。ソースコード自体は三次元の運動を扱えるが、今回は  $z$  軸の初期位置を 0 とし、考えないものとしている。各影響により異なるが、300 周前後まわっている。RR の項を含めると 300 周以内に近似できなくなるため、それ以外の項を考慮する場合についても 300 周程度周回していれば十分であると考えられる。与えた初期値は以下のとおりである。

表 4: 連星の初期値

		連星 1	連星 2
初期位置	x	$\frac{25.0}{1[\text{length}]}$	$-\frac{25.0}{1[\text{length}]}$
	y	0.0	0.0
	z	0.0	0.0
初速度	$v_x$	0.0	0.0
	$v_y$	式 (13-16) 参照	式 (13-16) 参照
	$v_z$	0.0	0.0

初速度を与えるに

$$\text{Newton の 項のみの場合}$$

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (13)$$

$$v = \frac{r_1 - r_2}{2} \sqrt{G \frac{m_1 + m_2}{r_1 - r_2}} \quad (14)$$

Post - Newton 以上 の 項を含む場合

$$G \frac{Mm}{r^2} = m(Gc^{-2} \frac{m}{r^2} \{n[-2G(2 + \eta) \frac{m}{r} + (1 + 3\eta)v^2 - \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2] - 2(2 - \eta)\dot{r}v\}) \quad (15)$$

$$v = \frac{r_1 - r_2}{2} \sqrt{G \frac{m_1 + m_2}{r_1 - r_2} \frac{1 - \left(\frac{2GM}{c^2(r_1 - r_2)}\right) (2 + (r_1 - r_2))}{1 - (1 + 3(r_1 - r_2)) \frac{GM}{c^2(r_1 - r_2)}}} \quad (16)$$

なお上記の式中において  $r_1 - r_2$  : 二体間の距離,  $m_1, m_2$  : 各質量,  $G$  : 万有引力定数,  $c$  : 光速,  $r_1, r_2$  : 各天体の位置,  $r$  : 天体間の距離 を表す。

#### 4.6 精度のチェック

作成された連星シミュレータおよび太陽系シミュレータが正しいことを確認するためにエネルギー保存と角運動量保存の二つの観点から確認を行った。コードが正しければエネルギーに

ついても角運動量についても保存されるはずである。RRの項を含めた場合のみ重力波が放出され、エネルギーが減少していくと考えられる。

#### 4.6.1 精度について

作成されたシミュレータが正しいことを確認するためにエネルギー保存と角運動量保存を調べたが、その数値がどの程度の精度で正しいのかについても考える必要がある。

初期値でのエネルギーおよび角運動量を  $E_0$  および  $\mathbf{L}_0$  とする。また各時間でのエネルギーおよび角運動量と  $E_0$  および  $\mathbf{L}_0$  との差を  $\Delta E(t)$  および  $\Delta \mathbf{L}(t)$  とする。この  $\Delta E(t)$  および  $\Delta \mathbf{L}(t)$  をそれぞれの大きさの初期値で割ったものを精度 (%) とする。式で表すと以下のとおりである。

$$\text{初期値を用いて } \frac{1}{2}mv(0)^2 - G\frac{Mm}{r(0)^2} = E_0 \quad (17)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv(t)^2 - G\frac{Mm}{r(t)^2} - E_0 \quad (18)$$

$$\frac{\Delta E(t)}{E_0} = C_E(t) \quad (19)$$

$$\mathbf{r}(0) \times m\mathbf{v}(0) = \mathbf{L}_0 \quad (20)$$

$$\Delta \mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t) - \mathbf{L}_0 \quad (21)$$

$$\frac{\Delta \mathbf{L}(t)}{\mathbf{L}_0} = C_L(t) \quad (22)$$

この  $C_E$  および  $C_L$  の値を精度とする。

#### 4.6.2 太陽系のの精度チェック

太陽系シミュレータの場合では多体間の運動を考えなければならないので、太陽が固定されているものと考えて、相対速度ではなく各惑星の速度、および天体間の距離から運動エネルギーを計算した。太陽系の問題において、時空の歪みの影響は非常に小さいため、エネルギーおよび運動量保存の確認は万有引力のみ考慮する。

$$K = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad (23)$$

$$U = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (24)$$

$$E = K + U \quad (25)$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{0i} \times \mathbf{v}_i \quad (26)$$

$$(27)$$

$m_i, m_j$  は天体の質量,  $r$  天体間の距離,  $N$  は天体の数を表す。

$K$  は運動エネルギー,  $U$  は位置エネルギーであり, 力学的エネルギー  $E$  と角運動量  $\mathbf{L}$  が保存される。

### 4.6.3 連星の精度チェック

連星シミュレータの場合二体間の運動でエネルギー保存を確認する．加速度に影響を加えた項によって，エネルギーおよび運動量の式も高次の項を加えていく．

また，以下の記号の意味は  $m = m_1 + m_2$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ ,  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ ,  $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m}$ ,  $\eta \equiv \frac{\mu}{m}$ ,  $\mathbf{L}_N = \mu \mathbf{x} \times \mathbf{v}$  であり， $r$  は二体間の距離をあらわす．

$$E_N = \mu \left( \frac{1}{2} v^2 - G \frac{m}{r} \right) \quad (28)$$

$$E_{PN} = \mu c^{-2} \left\{ \frac{3}{8} (1 - 3\eta) v^4 + \frac{1}{2} G (3 + \eta) v^2 \frac{m}{r} + \frac{1}{2} G \eta \frac{m}{r} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} G^2 \left( \frac{m}{r} \right)^2 \right\} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} E_{2PN} = \mu c^{-4} & \left\{ \frac{5}{16} (1 - 7\eta + 13\eta^2) v^6 + \frac{1}{8} G (21 - 23\eta - 27\eta^2) \frac{m}{r} v^4 \right. \\ & + \frac{1}{4} G \eta (1 - 15\eta) \frac{m}{r} v^2 \dot{r}^2 - \frac{3}{8} G \eta (1 - 3\eta) \frac{m}{r} \dot{r}^4 - \frac{1}{4} G^3 (2 + 15\eta) \left( \frac{m}{r} \right)^3 \\ & \left. + \frac{1}{8} G^2 (14 - 55\eta + 14\eta^2) \left( \frac{m}{r} \right)^2 v^2 + \frac{1}{8} G^2 (4 + 69\eta + 12\eta^2) \left( \frac{m}{r} \right)^2 \dot{r}^2 \right\} \quad (30) \end{aligned}$$

$$E = E_N + E_{PN} + E_{2PN} \quad (31)$$

$$\mathbf{J}_N = \mathbf{L}_N = \mu \mathbf{x} \times \mathbf{v} \quad (32)$$

$$\mathbf{J}_{PN} = \mathbf{L}_N c^{-2} \left\{ \frac{1}{2} v^2 (1 - 3\eta) + G (3 + \eta) \frac{m}{r} \right\} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{2PN} = \mathbf{L}_N c^{-4} & \left\{ \frac{1}{2} G (7 - 10\eta - 9\eta^2) \frac{m}{r} v^2 - \frac{1}{2} G \eta (2 + 5\eta) \frac{1}{2} \dot{r}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} G (14 - 41\eta + 4\eta^2) \left( \frac{m}{r} \right)^2 + \frac{3}{8} (1 - 7\eta + 13\eta^2) v^4 \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_N + \mathbf{J}_{PN} + \mathbf{J}_{2PN} \quad (35)$$

## 4.7 重力波波形

重力波の波形を求めるにあたって四重極公式を用いた． $i$  および  $j$  は 1 から 3 の空間成分をはしる．

$R$  および  $\hat{\mathbf{N}}$  は重力波源から観測者の距離およびベクトルを意味する．今回は  $x = 1$ ,  $y = z = 0$  の方向から観測するものとする．

$$h^{ij} = \frac{2\mu}{R} \left[ \tilde{Q}^{ij} + \frac{\delta m}{m} P^{1/2} Q^{ij} + P Q^{ij} + \frac{\delta m}{m} P^{3/2} Q^{ij} \right]_{TT} \quad (36)$$

$$\tilde{Q}^{ij} = 2 \left( v^i v^j - \frac{m}{r} n^i n^j \right) \quad (37)$$

$$P^{1/2} Q^{ij} = 3 \left( \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \frac{m}{r} \left[ 2n^{(i} v^{j)} - \dot{r} n^i n^j \right] + \left( \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v} \right) \left[ \frac{m}{r} n^i n^j - 2v^i v^j \right] \quad (38)$$

$$\begin{aligned} P Q^{ij} = \frac{1}{3} & \left\{ (1 - 3\eta) \left[ \left( \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right)^2 \frac{m}{r} \left[ \left( 3v^2 - 15\dot{r}^2 + 7\frac{m}{r} \right) n^i n^j + 30\dot{r} n^{(i} v^{j)} - 14v^i v^j \right] \right. \right. \\ & + \left( \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \left( \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v} \right) \frac{m}{r} \left[ 12\dot{r} n^i n^j - 32n^{(i} n^{j)} \right] + \left( \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v} \right)^2 \left[ 6v^i v^j - 2\frac{m}{r} n^i n^j \right] \\ & + \left. \left[ 3(1 - 3\eta) v^2 - 2(2 - 3\eta) \frac{m}{r} \right] v^i v^j + 4\frac{m}{r} \dot{r} (5 + 3\eta) n^{(i} n^{j)} \right. \\ & \left. + \frac{m}{r} \left[ 3(1 - 3\eta) \dot{r} - (10 + 3\eta) v^2 + 29\frac{m}{r} \right] n^i n^j \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{3/2}Q^{ij} = & (1 - 2\eta) \left\{ (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3 \frac{m}{r} \left[ \frac{5}{4} \left( 3v^2 - 7\dot{r}^2 + 6\frac{m}{r} \right) \dot{r}n^in^j - \frac{17}{2} \dot{r}v^iv^j \right. \right. \\
& - \frac{1}{6} \left( 21v^2 - 105\dot{r}^2 + 44\frac{m}{r}n^{(i}n^{j)} \right) \left. \right. \\
& + \frac{1}{4} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^2 \frac{m}{r} [58v^iv^j + (45\dot{r}^2 - 9v^2 - 28\frac{m}{r})n^in^j - 108\dot{r}n^{(i}v^{j)}] \\
& + \frac{3}{2} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^2 \frac{m}{r} [10n^{(i}n^{j)} - 3\dot{r}n^in^j] + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^3 \left[ \frac{m}{r}n^in^j - 4v^iv^j \right] \left. \right\} \\
& + \frac{1}{12} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \frac{m}{r} [2n^{(i}v^{j)} \left( \dot{r}^2 (63 + 54\eta) - \frac{m}{r} (128 - 36\eta) + v^2 (33 - 18\eta) \right) \\
& + n^in^j \dot{r} \left( \dot{r}^2 (15 - 90\eta) - v^2 (63 - 54\eta) + \frac{m}{r} (242 - 24\eta) \right) - \dot{r}v^iv^j (186 + 24\eta)] \\
& + (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \left[ \frac{1}{2} v^iv^j \left( \frac{m}{r} (3 - 8\eta) - 2v^2 (1 - 5\eta) \right) - n^{(i}v^{j)} \frac{m}{r} \dot{r} (7 + 4\eta) \right. \\
& \left. - n^in^j \frac{m}{r} \left( \frac{3}{4} (1 - 2\eta) \dot{r}^2 + \frac{1}{3} (26 - 3\eta) \frac{m}{r} - \frac{1}{4} (7 - 2\eta) v^2 \right) \right] \quad (39)
\end{aligned}$$

また  $A_{TT}^{ij} = A^{lm} (P^{il} P^{jm} - \frac{1}{2} P^{ij} P^{lm})$ ,  $P^{ij} = \delta^{ij} - N^i N^j$  である.  $\delta^{ij}$  はクロネッカーのデルタであり, 単位行列の各成分を意味する.

$$\delta^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

また  $n^{(i}v^{j)}$  は

$$n^{(i}v^{j)} = \frac{(n^iv^j + n^jv^i)}{2} \quad (41)$$

である.  $N^i, N^j$  は  $\hat{N}$  の  $ij$  成分を表す.



## 5 水星の近日点移動の再現

### 5.1 Newton 重力での太陽系惑星の運動

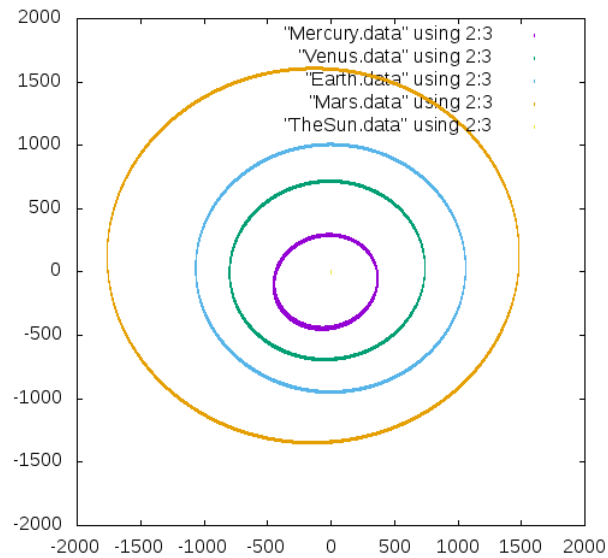


図 4: Newton の影響のみの太陽系天体の運動 (横軸:x[Length], 縦軸 y[Length])

図 4 は Post-Newton の項を含めていない太陽系の  $xy$  平面での運動の様子である。刻み幅  $dt = 0.1$ , 物理的には  $dt =$  約 492 秒, 時間の終わり  $t_{max} = 10000.0$  として火星までプロットしている。太陽年で約 1 年半, 水星が近日点を 6 回通過している。エネルギー保存のおよび角運動量保存を確認するための計算が目的であるので, プロットは火星までしか行っていないがエネルギーおよび角運動量の計算については水星から海王星までの太陽系の全惑星について行っている。

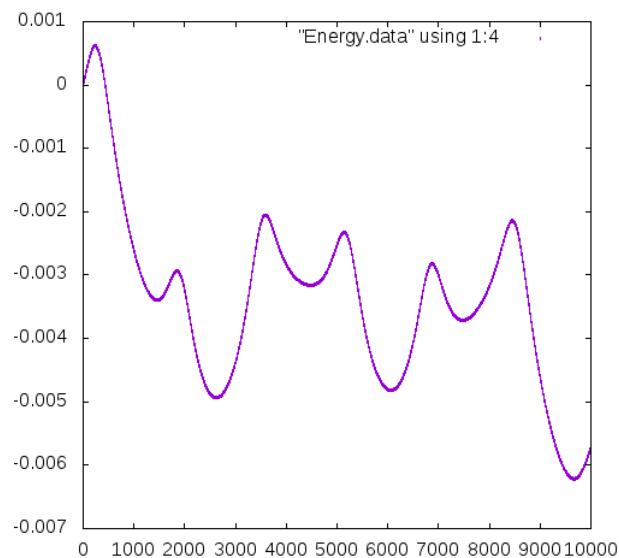


図 5: Newton の影響のみのエネルギーの変化 (横軸 t:[Time], 縦軸:エネルギーの変化)

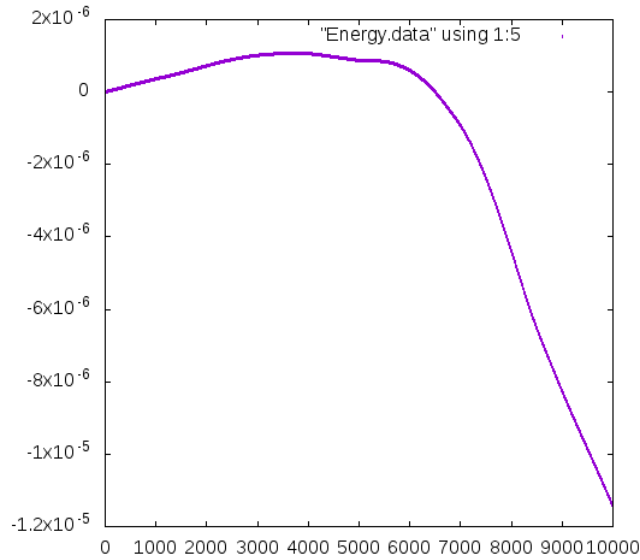


図 6: Newton の影響のみの角運動量の変化 (横軸 t:[Time], 縦軸:角運動量の変化)

図 4 の時のエネルギーおよび角運動量の保存状態が図 5 図 6 である。横軸は時間，縦軸がエネルギーおよび角運動量の誤差である。約 1 年として誤差は 0.006，つまり 0.6%以内で抑えられている。角運動量についても最大  $1.2 \times 10^{-5}$  であるから 1 年で 0.001%以内の誤差で抑えられている。

## 5.2 PostNewton 項を含めた太陽系惑星の運動

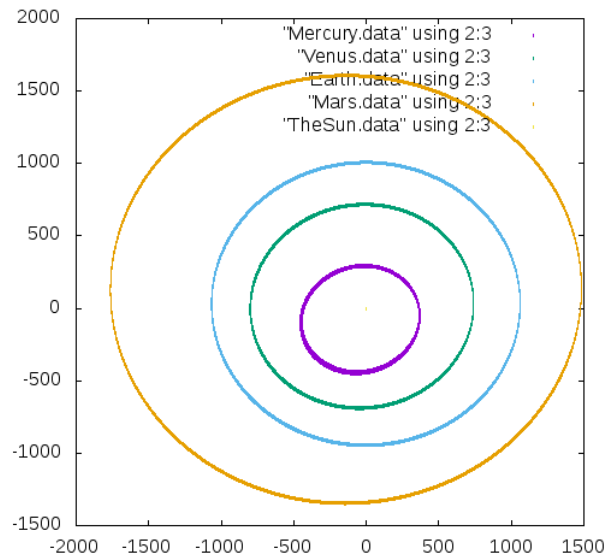


図 7: PostNewton の影響も含めた太陽系天体の運動 (横軸:x[Length], 縦軸 y[Length])

図 7 は Post-Newton の項を含めた太陽系の  $xy$  平面での運動の様子である。上記同様刻み幅  $dt = 0.1$ ，物理的には  $dt =$  約 492 秒，時間の終わり  $t_{max} = 10000.0$  として火星までプロットし

ている。x yともに単位は [Length] で、太陽年で約1年半、水星が近日点を6回通過している。Post-Newtonの影響を含めた計算でも、プロットは火星までしか行っていないがエネルギーおよび角運動量の計算については水星から海王星までの太陽系の全惑星について行っている。

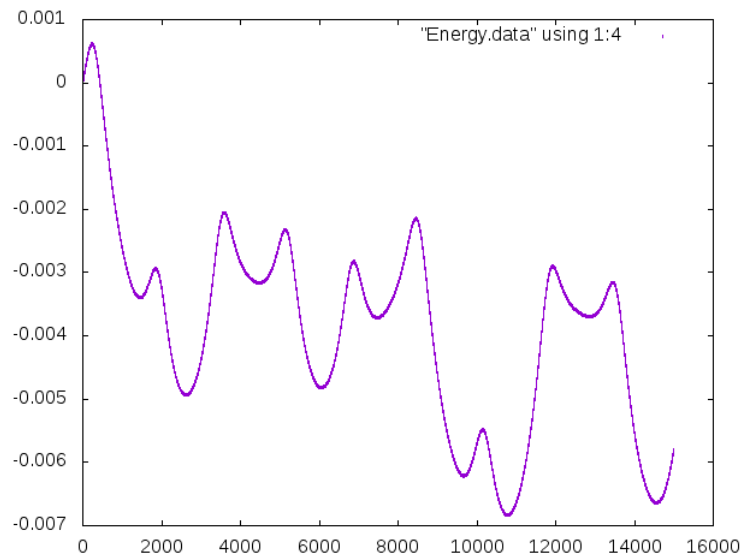


図 8: PostNewton の影響も含めた運動のエネルギーの変化 (横軸 t:[Time], 縦軸:エネルギーの変化)

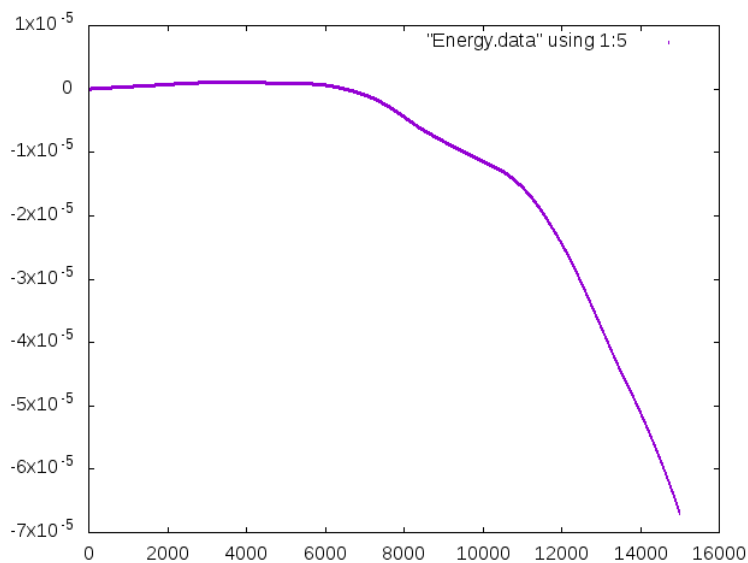


図 9: PostNewton の影響も含めた角運動量の変化 (横軸 t:[Time], 縦軸:角運動量の変化)

図7の時のエネルギーおよび角運動量の保存状態が図8図9である。横軸は時間、縦軸がエネルギーおよび角運動量の誤差である。図5図6同様に約1年間の運動をプロットしている。エネルギーは0.6%の誤差で保存している。また角運動量についても最大で  $7 \times 10^{-5}$ 、つまり1年で0.007%の誤差以内の精度で求められている。

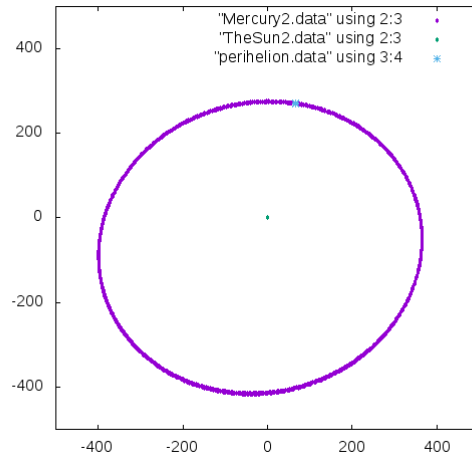


図 10: 太陽のみから PN1 次の項の影響を受ける水星の軌道 (横軸:  $x[\text{Length}]$ , 縦軸  $y[\text{Length}]$ )

図 10 は天体の数を太陽と水星のみに減らして PN の項の影響を考えた水星の軌道である。図中の点は近日点を表している。10 周程度では近日点の移動がみられない。

## 6 中性子星連星の合体と重力波

### 6.1 連星の運動

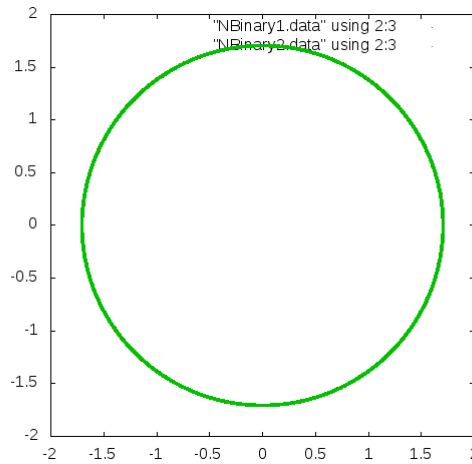


図 11: ニュートンの万有引力のみで運動する連星 (横軸:x[Length], 縦軸 y[Length])

図 11 は Newton の万有引力のみの影響を受けて楕円軌道を描く連星の軌道を  $xy$  面上に射影したものである。縦軸横軸ともに単位は [Length] で、300 周を超えているが同一の円運動を続けていることがわかる。

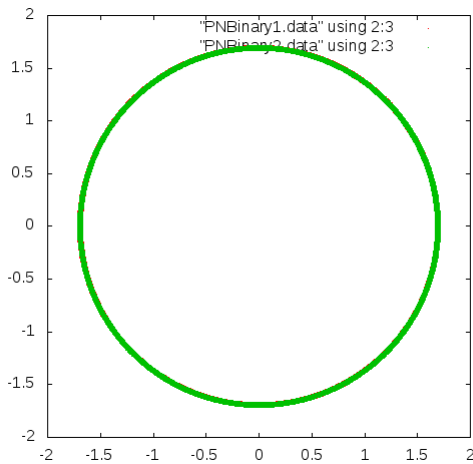


図 12: PostNewton1 次の影響まで含めた連星の運動 (横軸:x[Length], 縦軸 y[Length])

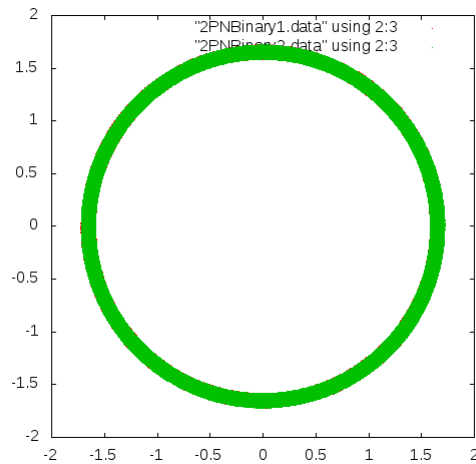


図 13: Post-Newton2 次の影響まで含めた連星の運動 (横軸:x[Length], 縦軸 y[Length])

図 12 は Post-Newton の影響まで、図 13 は  $Post^2 - Newton$  の影響まで考えた場合の連星である。どちらも円軌道が続ける。図 13 について円軌道にぶれが見えるが、初速度の問題と考える。Newton, Post-Newton,  $Post^2 - Newton$  までの影響までを考慮した運動では重力波の影響は現れないため、速度に違いはあるが、どの場合もエネルギーを保存し続けると考えられる。重力波を放出しないため、エネルギーを失わず、円運動が続ける。この各図から見られるよう

に，これらは束縛された運動を続けており，円軌道を描き続けるため，エネルギー等は保存され続けると考える．よってこれらの運動でエネルギーの保存状況について考える．

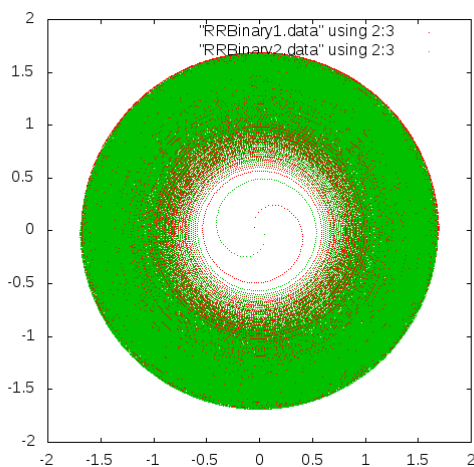


図 14: radiation reaction の影響まで含めた運動（横軸:x[Length]，縦軸 y[Length]）

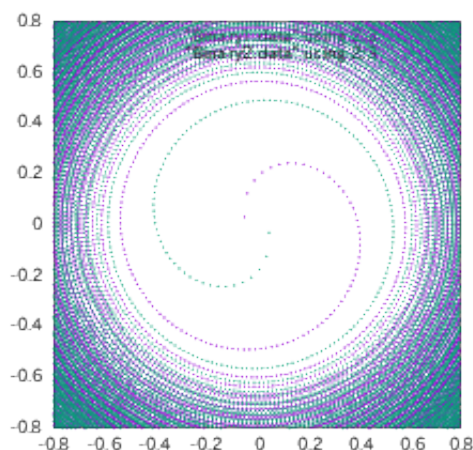


図 15: radiation reaction の影響まで含めた運動の中心付近（横軸:x[Length]，縦軸 y[Length]）

図 14 は RR の項まで含めた連星の運動である．これまでの運動と異なり次第に二体の距離が接近していることがわかる．今回の近似の上では，接触する前に星の速度が光速を超えてしまい，近似が正しく行えなくなっている．そのためより高次の項が必要であるが，最終的にはぶつかるだろうことが想定される．

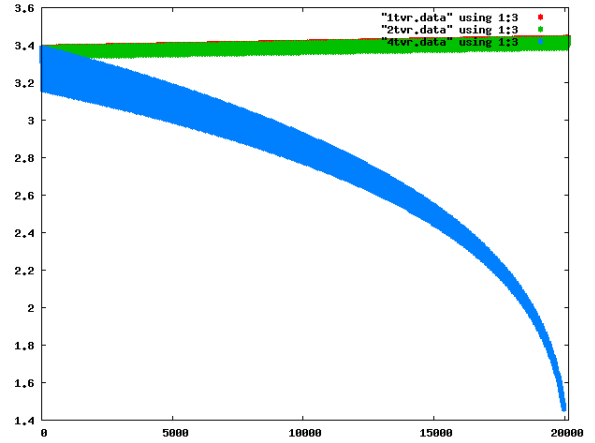
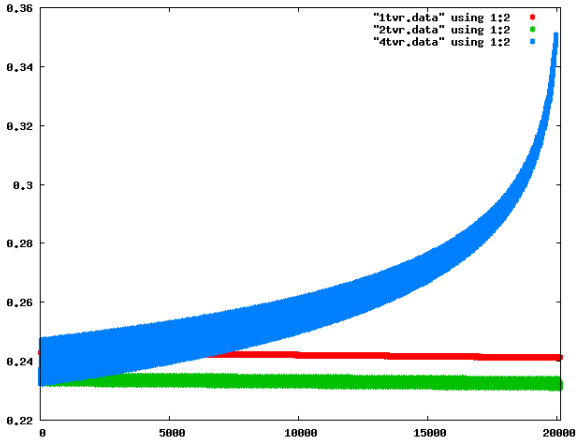


図 16: PostNewton1 次, 1.5 次および 2.5 次項の vt グラフ (横軸:時間 [Time], 縦軸:v[Length/Time]) (赤:Newton 緑:PN 青:RR)

図 17: PostNewton1 次, 1.5 次および 2.5 次項の rt グラフ (横軸:時間 [Time], 縦軸:v[Length/Time]) (赤:Newton 緑:PN 青:RR)

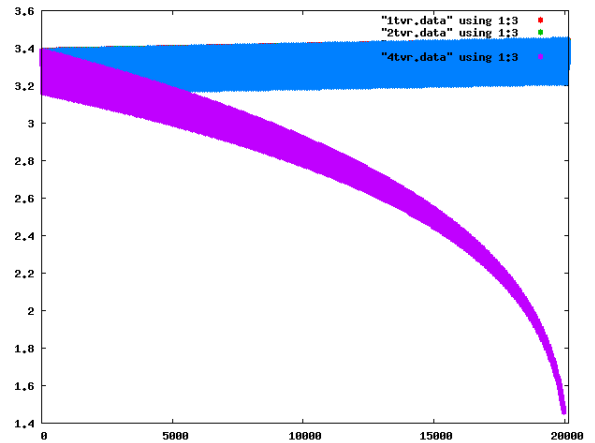
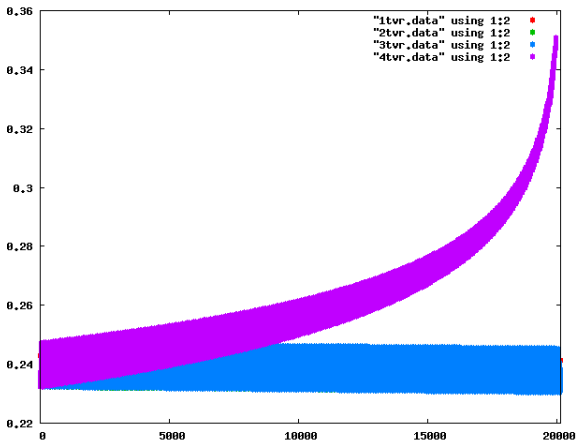


図 18: PostNewton2 次および 2.5 次項の vt グラフ (横軸:時間 [Time], 縦軸:v[Length/Time]) (青:2PN 紫:RR)

図 19: PostNewton2 次および 2.5 次項の t グラフ (横軸:時間 [Time], 縦軸:v[Length/Time]) (青:2PN 紫:RR)

図 18, 図 19 は時間変化に伴う相対速度と二体間の距離の変化をあらわしたグラフである。図 18 の横軸は時間, 縦軸は重力波を放出する天体はエネルギーの面のみならず, 速度, 周期が変化することが明らかになっている。これは加速することで重力波を放ちながら, 一方で加速したために連星が接近し, 距離が短くなったためにより加速するという運動を行うためである。楕円軌道を描くのでずれが生じているが, Newton, PostNewton,  $Post^2 - Newton$  については速度も距離も変化しない。図 14 で確認されたように, RR の項を加えた時には星の速度が上昇し, エネルギーを失いながら接近していることがわかる。この結果は重力波を放つ天体が行う運動といえる。

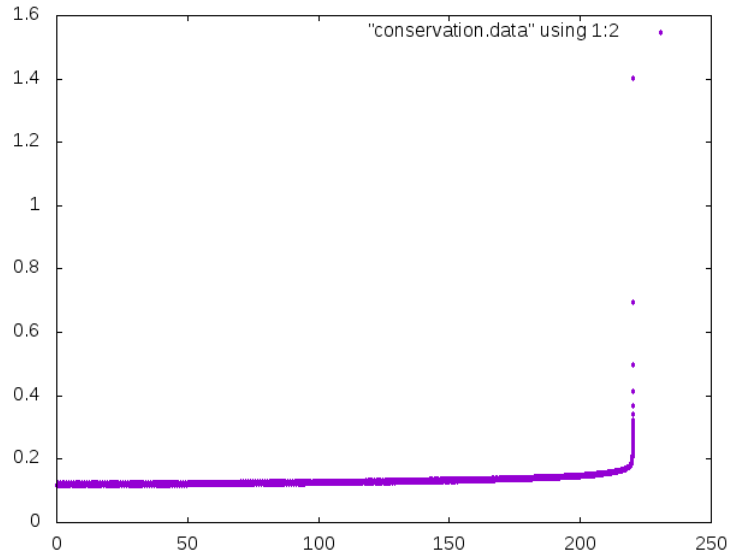


図 20: RR の項まで加えた場合の  $\frac{v}{c}$  の時間変化 (横軸:時間 [Time], 縦軸: $v/c$ )

図 20 は連星の速度  $v$  の光速  $c$  との比の時間変化である。横軸が時間を一周の時間で割った値、縦軸が一つの連星の速度  $v$  についての  $\frac{v}{c}$  である。図 15 では連星の中心で接近し、最終的には合体することが予測されるが、図 20 からみると、連星の速度は光を超えるという物理学的にあり得ない状況になっており、近似の精度が十分でないといえる。中性子星が互いの距離約 32km の時から精度が十分でなくなり、2.5 次までの PostNewton では正しいデータが得られない。

## 6.2 エネルギー保存の確認

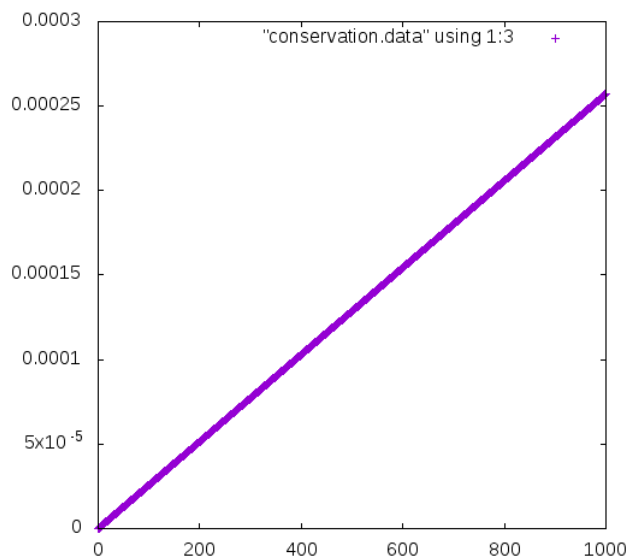


図 21: Newton の影響のみのエネルギーの変化 (横軸  $t$ :[Time], 縦軸:エネルギーの変化)



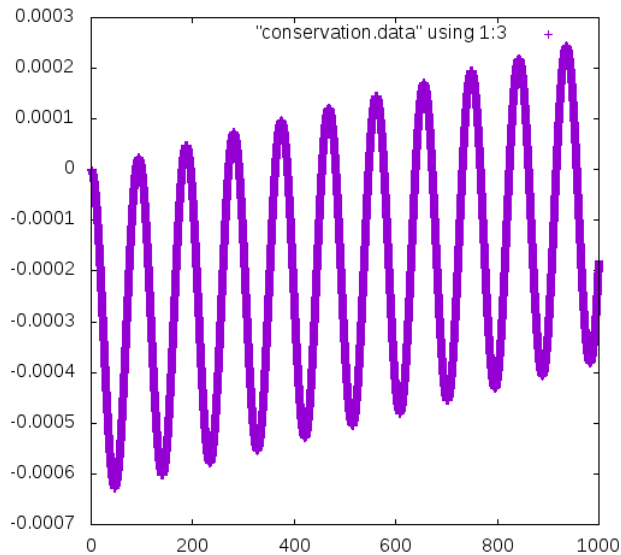


図 22: Post-Newton の補正まで加えたエネルギーの変化 (横軸 t:[Time], 縦軸:エネルギーの変化)

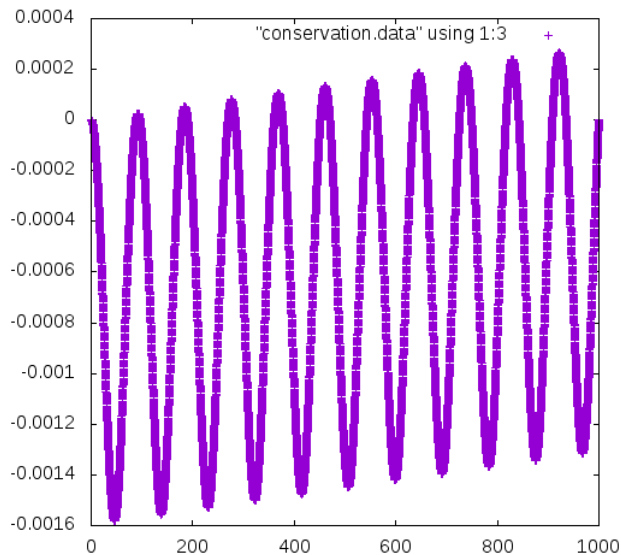


図 23: Post<sup>2</sup>-Newton の補正まで加えたエネルギーの変化 (横軸 t:[Time], 縦軸:エネルギーの変化)

図 21 は Newton の項の影響だけを加えた連星の運動のエネルギーの誤差の図である。図 22 は Post-Newton の補正まで加えたエネルギーの変化, 図 23 は  $Post^2 - Newton$  の補正まで加えたエネルギーのずれである。各図について共通であるが横軸は時間, 縦軸はエネルギーの保存の精度をあらわしている。§4.2 に指定している通り, 単位時間は  $0.00049[sec]$  なので 4.9 秒程度の時間で, 連星が 10 周程度周回する時間である。エネルギーの単位についても §4.2 通り。Newton の項のみの場合は 0.025%, Post-Newton の補正まで加えて 0.06%,  $Post^2 - Newton$  まで加えても 0.16% の精度でエネルギーが保存されていることが確認できた。前述したとおり, 2 次の項である 2PN の補正項までは重力波の影響が現れず, エネルギーは保存し続ける。この結果からもエネルギーの保存が確認できたので, 図 11 および図 12, 図 13 の運動が正しく計算できて

いることが確認できた。

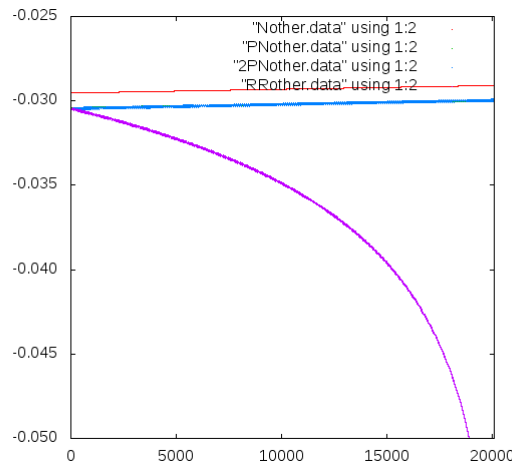


図 24: Newton と PostNewton1 次, 2 次および 2.5 次のエネルギーの時間変化 (横軸  $t$ : [Time], 縦軸: エネルギーの変化)

運動が正しく計算されていることを確認するために, エネルギー保存の観点から検証を行った. Newton の項, Post-Newton の補正項,  $Post^2 - Newton$  の補正項までで連星の運動を計算した場合, エネルギーが保存されることは前述したとおり明らかとなった. しかし 2.5 次の RadiationReaction の補正項は重力波の影響が発生する. 重力波が放出されるとエネルギーが保存されない. 図 24 は Newton の項, Post-Newton の補正項,  $Post^2 - Newton$  の補正項および RadiationReaction の各補正項をくわえた運動のエネルギー保存の図である. 横軸が時間経過, 縦軸がエネルギーである. 単位については上記のとおりである. 一番上の直線が Newton の項である. その下の直線に Post-Newton の補正項,  $Post^2 - Newton$  の補正項まで加えた運動のエネルギーの変化が重なって表示されている. 個別にプロットしたとおりこれらは高い精度でエネルギー保存を満足している.

その下の急激に下がっている直線が RadiationReaction の補正を加えた運動のエネルギーである. 2 次までの補正項と比べて明らかにエネルギーが減少している様子が確認できる. すなわちエネルギーを重力波として放出しているといえる.

実際の連星も加速し接近するにしたがって急激にエネルギーが減少するため, 実際のデータと比較しても近い変化をしているといえる.

### 6.3 重力波波形

重力波は Post-Newton の 2.5 次の項まで加えた時に影響がみられる. そのため以下の図はすべて Post-Newton の 2.5 次の項を加えた運動としている.

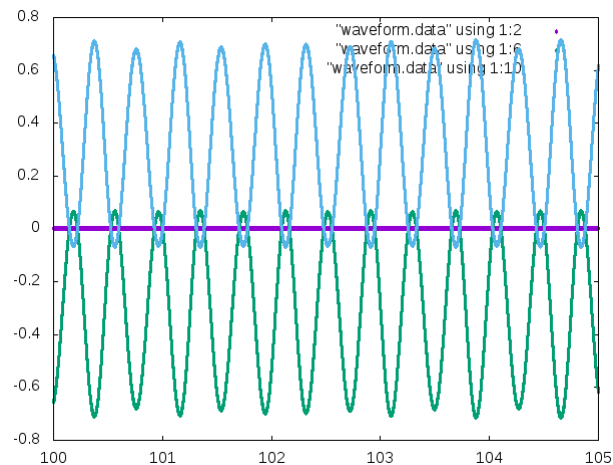
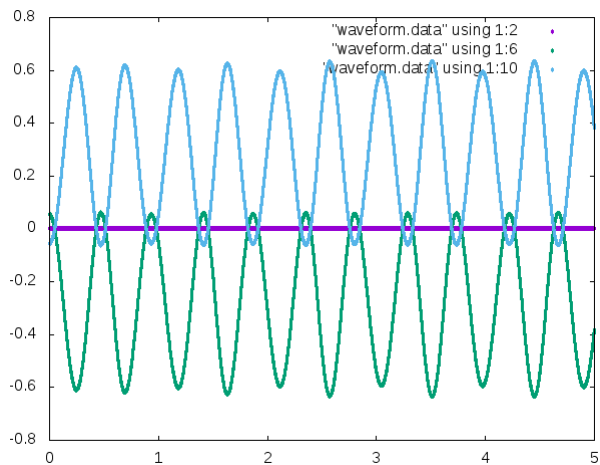


図 25: Post-Newton1 次の項まで加えた重力波の初めか 図 26: Post-Newton1 次の項まで加えた重力波の 100 周  
ら 5 周 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み) 目から 5 周 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み)

図 25 は重力波波形を 1 次の項まで加えた重力波波形の対角成分であるである。縦軸は振幅,  
横軸は時間変化を 1 周の時間で割った値である。

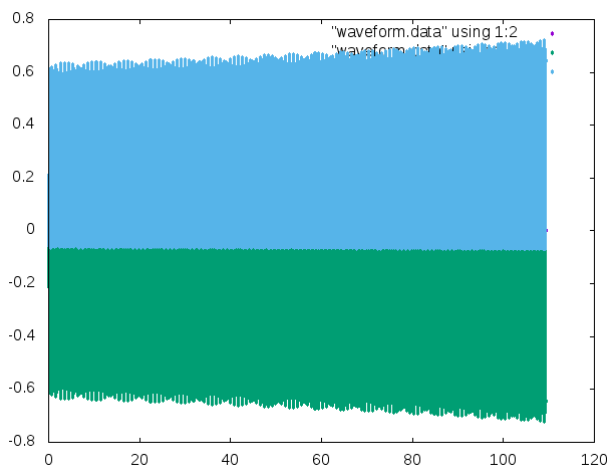


図 27: Post-Newton1 次の項まで加えた重力波の対角成分 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み)

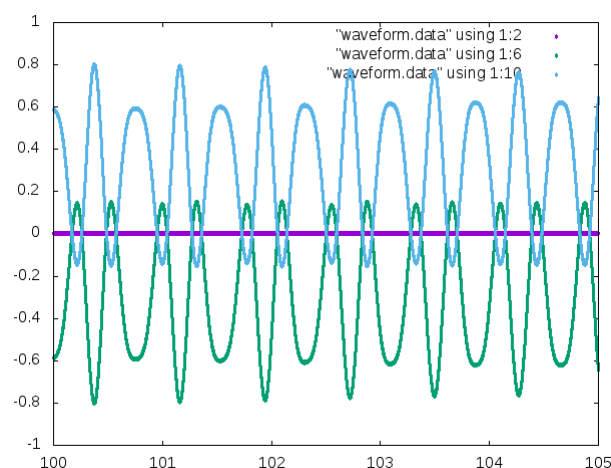
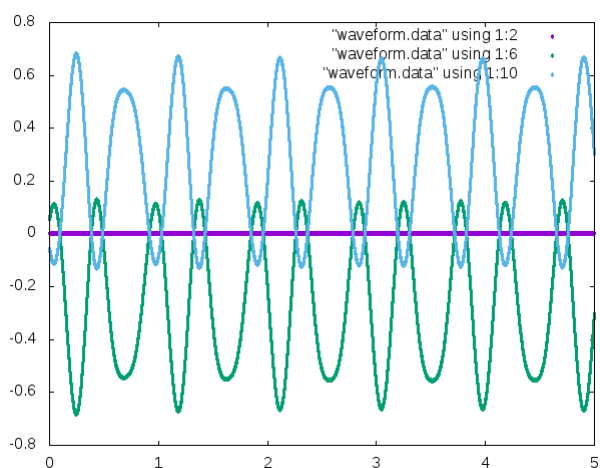


図 28: Post-Newton1.5 次の項まで加えた重力波の初めか 図 29: Post-Newton1.5 次の項まで加えた重力波の 100 周  
ら 5 周 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み) 目から 5 周 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み)

図 28 およびは重力波波形を 1.5 次の項まで加えた重力波波形の対角成分である。縦軸は振幅,  
横軸は時間変化を 1 周の時間で割った値である。

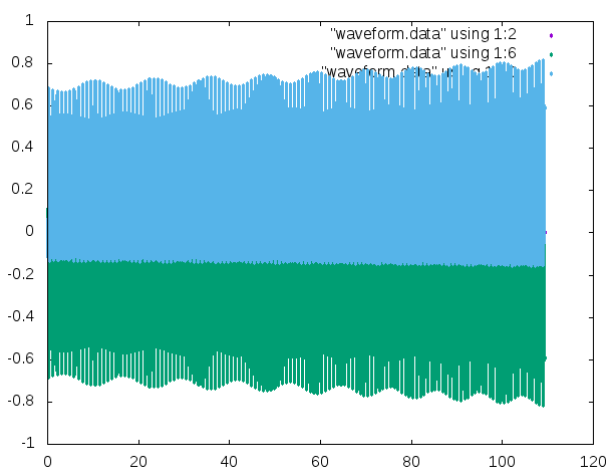


図 30: Post-Newton1.5 次の項まで加えた重力波の対角成分 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み)

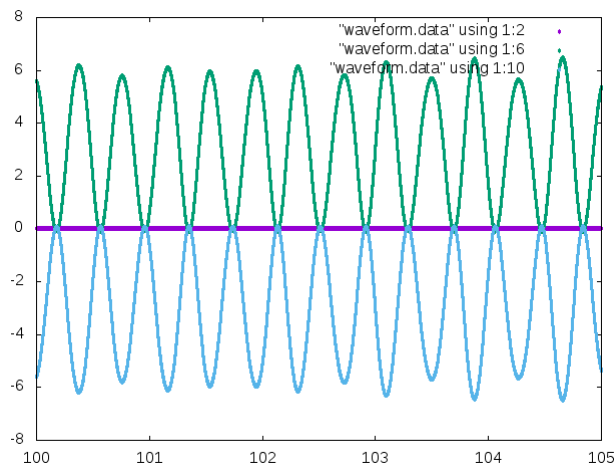
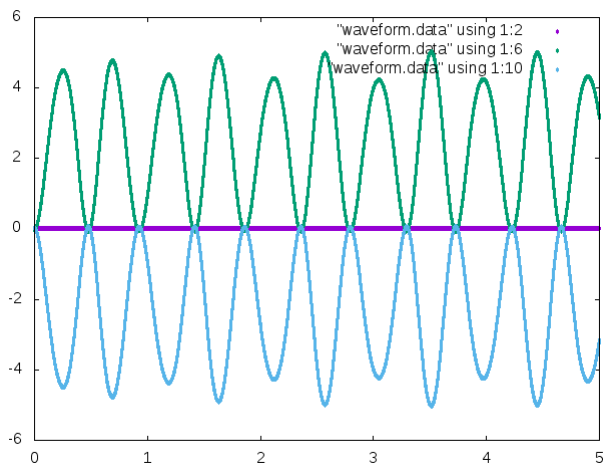


図 31: Post-Newton2 次の項まで加えた重力波の初めか 図 32: Post-Newton2 次の項まで加えた重力波の 100 周  
ら 5 周 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み) 目から 5 周 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み)

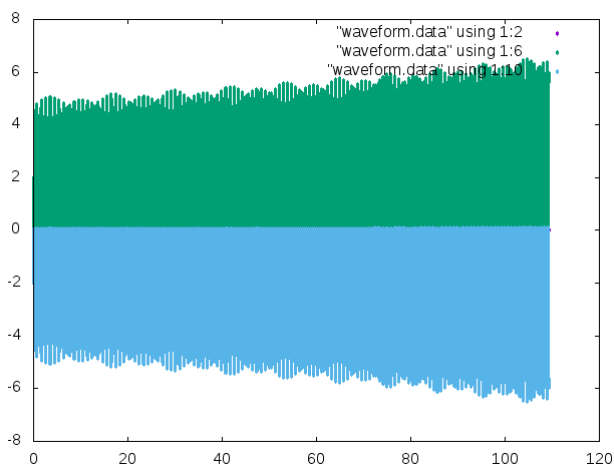


図 33: Post-Newton2 次の項まで加えた重力波の対角成分 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み)

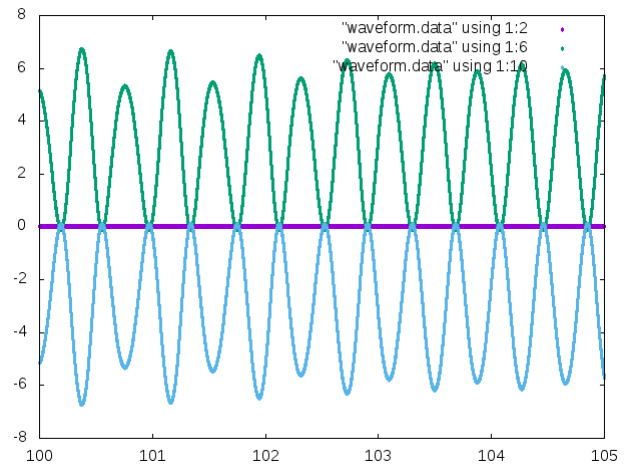
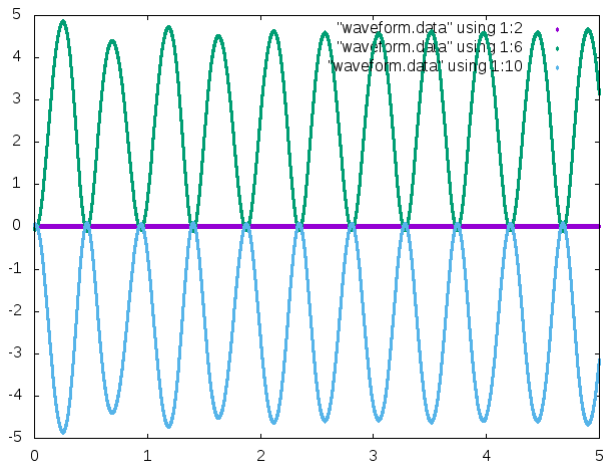


図 34: Post-Newton2.5 次の項まで加えた重力波の初めか 図 35: Post-Newton2.5 次の項まで加えた重力波の 100 周  
ら 5 周 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み) 目から 5 周 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み)

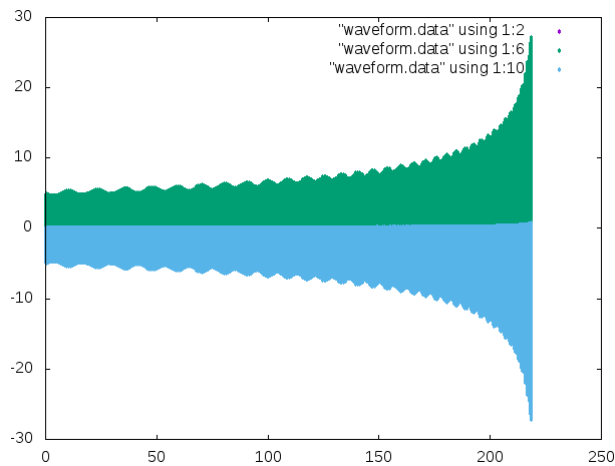


図 36: Post-Newton2.5 次の項まで加えた重力波の対角成分 (横軸 t:[Time], 縦軸:歪み)

図 14, 16, 17 から見られる通り, 今回の計算では RR の項を含めることで, 連星が加速しながら接近している様子が確認された. 連星が重力波を放ちながら, エネルギーを失い, さらに加速し, という運動を行っているためである. すなわちこの結果から重力波が放たれているということが確認できたといってよい. また重力波波形についても計算できた.

## 7 まとめ

### 7.1 結論

相対性理論の時空の歪みを含めた天体の運動について計算できた。太陽系シミュレータに時空の歪みを含めることで近日点移動や重力波を放出する連星の運動をシミュレーションできた。重力波を放出する天体について、エネルギーを失い加速されていく様子が確認された。この結果は現実の結果と比較して重力波を放出しているといえる。

重力波についてもその波形を観測できた。連星は互いに接近するため、波形は時間経過とともに周波数が大きくなり、振幅も増大する。計算結果の波形からも予想の通りに周波数、振幅の増大がみられた。

### 7.2 今後の展望

今回の連星シミュレータでは天体を質点として扱っており、星の半径や自転の影響が考慮されていない。現実的なデータを得るためには Spin-orbit, Spin-spin の項も含めて計算する必要がある。

また本研究ではポストニュートン近似を用いて計算を行った。これは重力波観測の波形予想では標準的な方法である。一般相対性理論を検証するという観点からは、修正した重力理論の同様な波形解析が望まれる。今後の研究の一つの方向として考えたい。

## 参考文献

- [1] B. P. Abbott et al., Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, 2016
- [2] Clifford M. WILL, GRAVITATIONAL WAVES FROM INSPIRALING COMPACT BINARIES: A POST-NEWTONIAN APPROACH
- [3] Eric Poisson, Clifford M. Will, Gravity, CAMBRIDGE, 2014
- [4] NATIONAL RESEARCH COUNCIL, Gravitational Physics, NATIONAL ACADEMY PRESS, 1999
- [5] 平川浩正, 復刊 相対論 第2版, 共立出版株式会社, 2011
- [6] 和田純夫, 相対論的物理学のききどころ, 岩波書店, 1996
- [7] 真貝寿明, ブラックホール・膨張宇宙・重力波 一般相対性理論の100年と展開, 光文社新書, 2015
- [8] 白水徹也, アインシュタイン方程式, サイエンス社, 2012
- [9] 福江純, よくわかる相対性理論, 日本実業出版社, 2009
- [10] 小玉英雄, 物理学基礎シリーズ6 相対性理論, 培風館, 1997
- [11] 海上保安庁 天体位置表の基礎理論 ((JD245 1545.0))
- [12] <http://www.ast.cam.ac.uk/research/cosmology.and.fundamental.physics/gravitational.waves>