

# 砂山や砂丘形成における「べき乗則」の出現

大阪工業大学 情報科学部 情報メディア学科  
花岡信行

2017年 2月9日

## 目次

1	序論	3
1.1	動機 . . . . .	3
1.2	章構成 . . . . .	3
2	本論文で用いた法則	4
2.1	べき乗則 . . . . .	4
2.2	最小二乗法 . . . . .	5
3	砂山モデル	6
3.1	概要 . . . . .	6
3.2	シミュレーション方法 . . . . .	6
3.3	形状の比較 . . . . .	7
3.4	雪崩の規模と頻度の比較 . . . . .	8
3.5	べき乗則 . . . . .	11
3.6	地震との関係性 . . . . .	11
3.7	まとめ . . . . .	11
4	砂丘形成のシミュレーション	12
4.1	概要 . . . . .	12
4.2	2D CSモデル . . . . .	12
4.3	シミュレーション方法 . . . . .	13
4.4	形状の推移 . . . . .	14
4.5	100ステップごとの100ステップ前との高さの差の平均値の比較 . . . . .	15
4.6	べき乗則 . . . . .	17
5	結論	18

# 1 序論

## 1.1 動機

地球と衝突する隕石の大きさ( $x$ )と頻度( $y$ )や、地震の規模( $x$ )と頻度( $y$ )など、さまざまな自然現象が「べき乗則」

$$y = bx^a \quad (1)$$

に従うことが知られている。べき乗則が成立すると、一般に、フラクタル構造と呼ばれるスケールによらない特徴が見られたり、背後に現象を説明するような法則が存在している可能性が考えられる。砂漠や海岸などで見ることができる砂丘は、風によって砂が動かされることにより形成される。べき乗則を知り、おなじ自然現象である砂丘にもべき乗則が見られるのではないかと疑問を持った。本研究では砂山の形成や砂丘の形成にもべき乗則が見られるか検証するため、計算機上で砂丘形成のシミュレーションを行った。

## 1.2 章構成

第2章では本論文で使用する法則について説明する第3章では砂山モデルについて説明する。第4章では砂丘形成シミュレーションについて説明する。

## 2 本論文で用いた法則

### 2.1 べき乗則

べき乗則とは、自然現象や社会現象にみられる、ある観測量 $x$ と $y$ がべき乗に比例する法則であり、

$$y = bx^a \quad (2)$$

で表すことができる。式(2)の両辺の対数をとると

$$\log y = a \log x + \log b \quad (3)$$

となり、傾き $a$ 切片 $b$ の直線になるという特徴がある。

例えば、地震の規模と頻度の関係がある。図1は横軸が地震の規模、縦軸はその規模の地震の頻度である。両対数グラフでこのような直線となる。

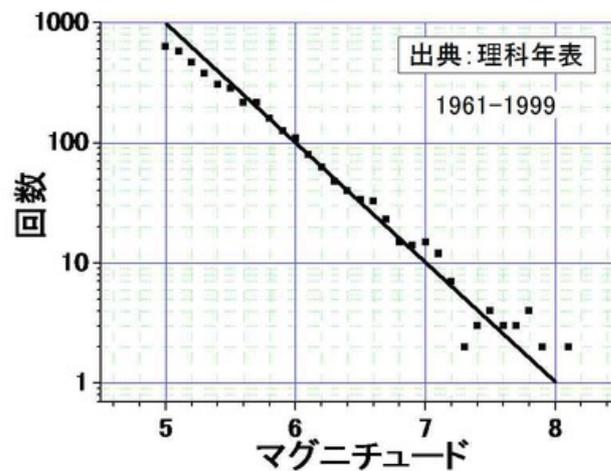


図1.地震の規模と頻度の関係 出典:[1]

## 2.2 最小二乗法

本研究では、得られたデータがどれだけ直線 (3) に近いかどうかを検証するが、そこで用いる最小二乗法について説明する。ある測定などで得られた数値を 1 次関数など特定の関数を近似するとき誤差の 2 乗が最小になる係数を求める方法である。本研究で行ったのは 1 次関数における最小二乗法であり、データ点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  が与えられたとき

$$y = ax + b \quad (4)$$

の直線に近似するときの係数  $a$ 、 $b$  は、

$$a = \frac{n \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n y_k}{n \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2} \quad (5)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (6)$$

で求めることができる。このときの誤差  $R^2$  は

$$R^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (7)$$

で表される。

### 3 砂山モデル

#### 3.1 概要

平面上に上から砂を落としていくと砂山ができる。砂山はどこまでも高くなるのではなく、一定の高さになると雪崩を起こす。この時の、雪崩の頻度とその規模についてシミュレーションを行った。

#### 3.2 シミュレーション方法

平面上の50×50の格子状のセルの中央から上下左右5個のセルの範囲に、10万粒の砂粒をランダムに落としていく。図2に示しているように、1つの格子点に一定数砂粒が積もった場合、上下左右のセルにそれぞれ一定数砂粒を移動させ、これを雪崩とした。連続して起きた雪崩の数を雪崩の規模とし、10万粒落とした場合の雪崩の規模とその頻度について調べた。本研究では、次のモデルを考えた。

- (A) 1つの格子点に4つ砂粒が積もった場合に上下左右に1つずつ砂粒を移動させた場合
- (B) 8つ砂粒が積もった場合に2つずつ移動させた場合
- (C) 12粒砂粒が積もった場合に3つずつ移動させた場合

モデル (A)のときの砂の動きの例を図2に示す。

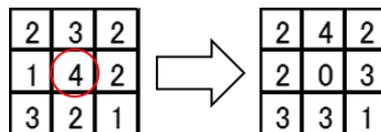


図2. モデル (A) での雪崩による砂の動きの例

### 3.3 形状の比較

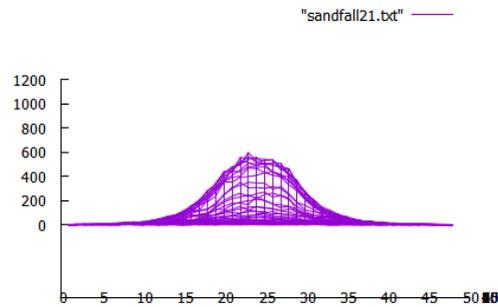


図3. モデル (A) : 4 つ砂粒が積もった場合に雪崩を起こす場合の砂山の断面

図3は (A)の場合で、10万粒を落とし終えたときの砂山の断面を表したものである。なだらかな砂山ができた。

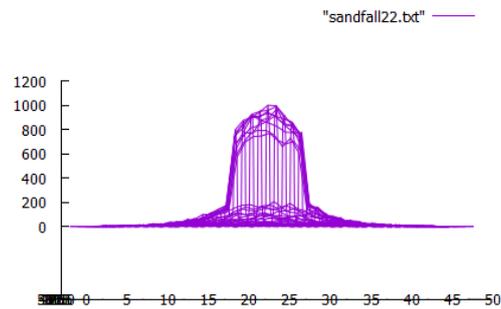


図4. モデル (B) : 8 つ砂粒が積もった場合に雪崩を起こす場合の砂山の断面

図3に比べ、高さが高くなり砂山の傾斜が急になっていることがわかる。

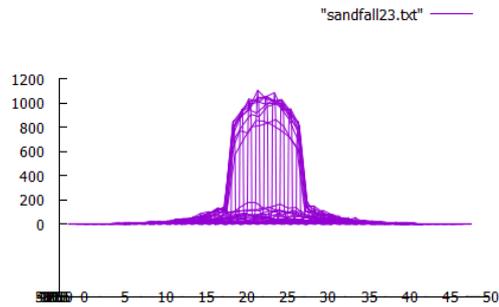


図5. モデル(C):12粒砂粒が積もった場合に雪崩を起こす場合の砂山の断面  
図4と比べ、砂山の傾斜が急になっていることがわかる。

### 3.4 雪崩の規模と頻度の比較

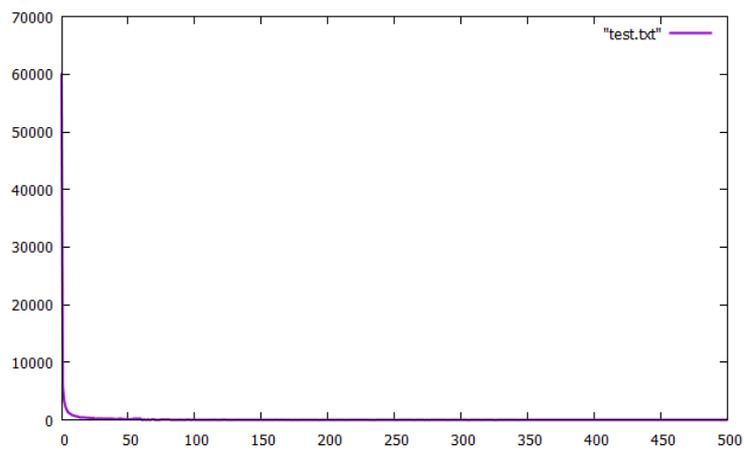


図6. モデル(A): 4つ砂粒が積もった場合における雪崩の規模 $x$ とその頻度 $y$

横軸が雪崩の規模、縦軸がその規模の雪崩が起きた頻度である。雪崩の規模とは、砂粒を1つ落とした場合に雪崩が連鎖的に起きる回数である。雪崩が起きなかった回数は59976回である。雪崩が起きなかった回数が突出しているため、規模の大きな雪崩の回数が0に見えるが、実際の値は0ではない。対数で表示すると、図6になる。

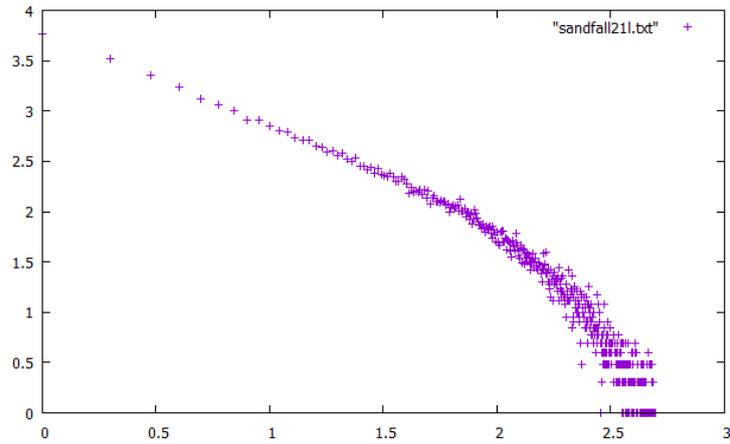


図7. モデル (A)の砂山の雪崩の規模（連続して起こる雪崩の数）と頻度の関係  
 （横軸： $\log_{10}$ (規模 $x$ ), 縦軸: $\log_{10}$ (頻度 $y$ ))

途中までの値は直線状に見えるが、途中から直線ではなくなっていくことがわかる。これは、規模の大きい雪崩ほどその頻度が一定ではないということである。つまり、規模の大きい雪崩の頻度は予測しにくいということがわかる。図7は、 $x \leq 10^{1.5}$ では、ほぼ直線になっている。すなわち、精度が大きい（規模が比較的小さい）雪崩は、べき乗則にしたがってその数を記述することができることを示唆している。

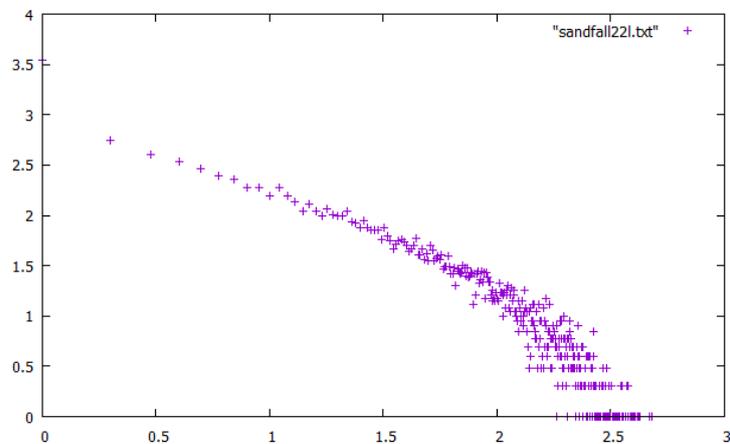


図8. モデル (B)の砂山の雪崩の規模（連続して起こる雪崩の数）と頻度の関係  
 （横軸： $\log_{10}$ (規模 $x$ ), 縦軸: $\log_{10}$ (頻度 $y$ ))

図7と同様のグラフができたが、直線に見える範囲が狭くなっている。

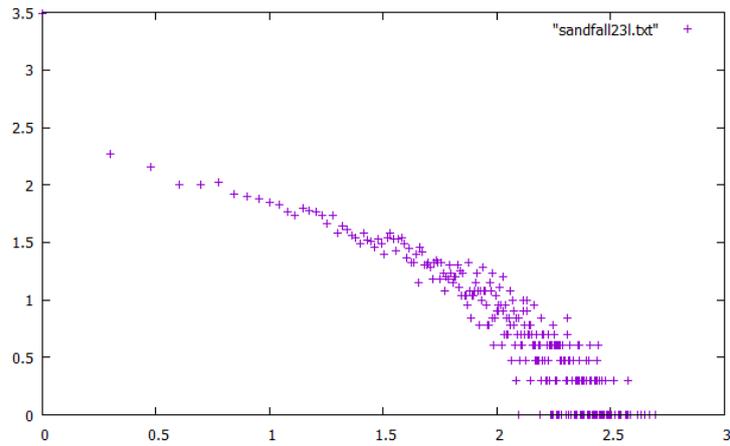


図9. モデル (C)の砂山の雪崩の規模（連続して起こる雪崩の数）と頻度の関係  
 （横軸： $\log_{10}$ (規模 $x$ ), 縦軸: $\log_{10}$ (頻度 $y$ ))

図7、図8と同様のグラフができたが、直線に見える範囲が狭くなっている。3つのモデルを重ねた図を図10に示す。いずれも左側（小さな規模）の雪崩の頻度は直線状になっていて、右側は広がっている。右側の広がりには頻度が小さいためと考えられる。次章ではこれらのべき乗則との関連を調べる。

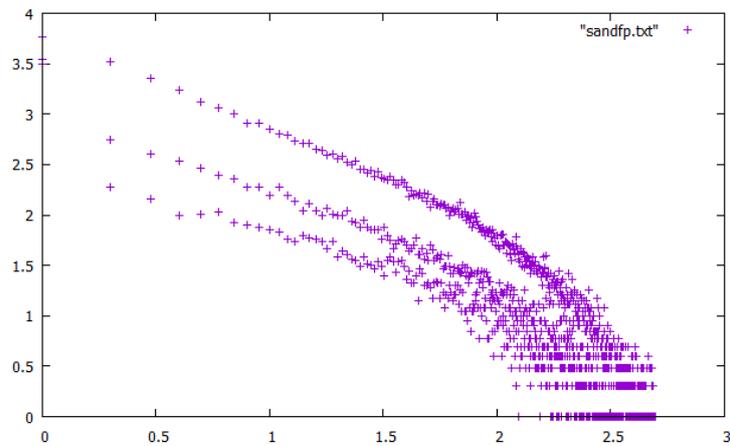


図10. 図7～図9を重ねたグラフ（横軸： $\log_{10}$ (規模 $x$ ), 縦軸: $\log_{10}$ (頻度 $y$ ))

### 3.5 べき乗則

まず図7～9図の $x \leq 10^2 = 100$ の部分で最小二乗法を用いて関数にフィッティングさせ、直線近似を求めた。 $y = bx^a$ としたときの結果を以下の表1に示す

表1. 近似式を求めた表

	モデル(A)	モデル(B)	モデル(C)
$a$	-1.0178	-0.9767	-0.9147
$b$	3.8725	3.2375	2.8223
相関係数	0.9885	0.9577	0.8792

表1より、雪崩を起こす砂粒の数が少ないほど直線に近似しているとわかる。

### 3.6 地震との関係性

地震の規模と頻度の関係はべき乗則が見られることが知られており、地震の規模と頻度 of 関係を表すグーテンベルグ・リヒター則では、べき指数 $a$ 値は-0.9～-1.0程度であり[2]、 $a$ 値が低いほど傾きが急なため、大きな地震に対して小さい地震が多くなる。砂山モデルでもべき指数は-0.9～-1.02であり、べき指数が小さいほど規模の小さな雪崩の割合が多いため、地震との関係性が見られることがわかる。

### 3.7 まとめ

雪崩を起こす砂粒の数が少ないほど直線に近似しており、4つで雪崩が起きる場合の相関係数は0.9885と直線ときわめて近似しているため、砂山の雪崩の規模とその頻度はべき乗則に従っているといえる。

## 4 砂丘形成のシミュレーション

### 4.1 概要

本章では、もう1つの現象として砂丘形成を試みた結果を報告する。砂丘は、乾燥した砂が十分にあり、風が強いところでできやすい。砂丘上の風と風上から運ばれてくる砂の供給により、砂丘が形成される。本研究では、H.Niiyaらによるthe dynamics of two-dimensional cross sections(以下「2D CSモデル」)[2]を用いて砂丘を形成した。このモデルについての説明は後述する。形成した砂丘の堆積の仕方にべき乗則がみられるかを調べた。

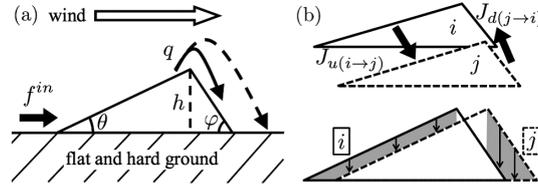


図11. 2D CSモデル 出典:[3]

### 4.2 2D CSモデル

このモデルは、3次元の砂丘の2次元断面を大まかに三角形ととらえたモデルである。風向きに対して一定の間隔で垂直に横方向に並べ、平坦で硬い平面上に一定方向の風が吹いていると仮定する。このモデル内での砂の動きと隣接するモデル間の砂の動きを計算することにより、砂丘を形成する。このモデルの頂点座標を $(x_i, h_i)$ とおき、

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{h_i} [q(BT_E(h_i) + C) + \sum_{j=i\pm 1} (BJ_{d(j\rightarrow i)} + CJ_{u(i\rightarrow j)}) - Cf_i^{in}] \quad (8)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{A}{h_i} [q(T_E(h_i) - 1) + \sum_{j=i\pm 1} (J_{d(j\rightarrow i)} - J_{u(i\rightarrow j)}) + f_i^{in}] \quad (9)$$

にしたがうものとする。ここで、 $J_u, J_d$ は隣接する砂の動きを表す項で

$$J_{u(i\rightarrow j)} = \begin{cases} \frac{D_u B}{2A\Delta w^2} \{h_i^2 - [h_j - \frac{A}{B}(x_j - x_i)]^2\} x_j - x_i > 0 \\ \frac{D_u B}{2A\Delta w^2} \{[h_i + \frac{A}{B}(x_j - x_i)]^2 - h_j^2\} x_j - x_i \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$J_{d(j \rightarrow i)} = \begin{cases} \frac{D_d C}{2A \Delta w^2} \{h_i^2 - [h_j - \frac{A}{C}(x_j - x_i)]^2\} x_j - x_i > 0 \\ \frac{D_d C}{2A \Delta w^2} \{[h_i + \frac{A}{C}(x_j - x_i)]^2 - h_j^2\} x_j - x_i \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

として、パラメータA,B,Cはそれぞれ1/10, 4/5, 1/5に、 $\Delta w$ は1と設定した。  
また

$$T_E(h) = \frac{h}{1.0 + h} \quad (12)$$

である。 $x, h$ が頂点座標、 $q$ は風力、 $f_i^{in}$ は風上からの砂の供給量、 $D_u, D_d$ はそれぞれ風上と風下の拡散係数である。Niiyaらは、このモデルを用いて、砂丘に吹く風が蛇行するような形を作り出すことを示している。

図11にあるように、左から風が当たると斜辺上の砂が風下側に移動すると共に、右側の側へ堆積していく。また、 $J_d, J_u$ の項により、三角形の高さの差に応じて、砂が移動してゆく形になっている。

#### 4.3 シミュレーション方法

本研究では、2D CSモデルの三角形を100用意し、砂丘の形成過程を1000ステップ進め、100ステップごとに100ステップ前の砂丘の高さの平均値の差を調べた。以下に示す図はすべて縦軸がステップ数 $x$ 、横軸が高さの差 $y$ を常用対数化したグラフである。

初期状態は

$$h_i = 0.1, x_i = 10 \sin \frac{6.28i}{100} \quad (13)$$

とした。

本研究では、パラメータを変えた次の4つのモデルを考え、比較した。

モデル(A): $D_u=0.06 D_d=0.1 q=1$

モデル(B): $D_u=0.1 D_d=0.1 q=1$

モデル(C): $D_u=0.06 D_d=0.1 q=0.5$

モデル(D): $D_u=0.1 D_d=0.1 q=0.5$

#### 4.4 形状の推移

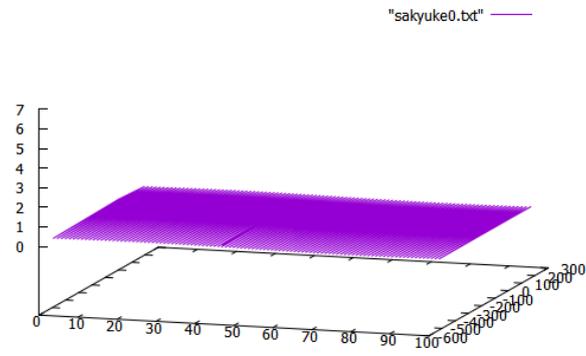


図12.モデル(A)の砂丘の初期状態の形状

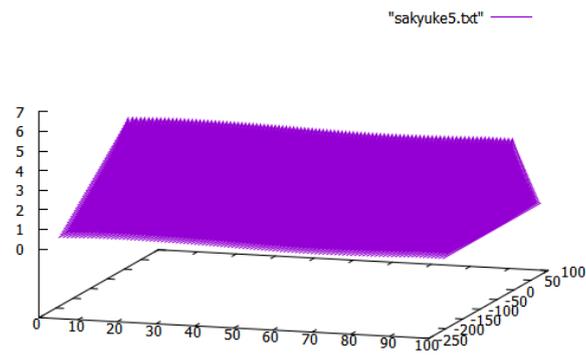


図13.モデル(A)の砂丘の500ステップ後の形状

時間の経過により、高さが高くなっている。

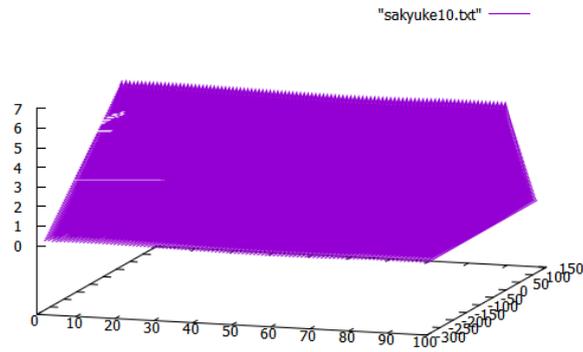


図14.モデル(A)の砂丘の1000ステップ後の形状

高さは高くなっているが、初期状態から500ステップまでの高さの差より、500ステップから1000ステップまでの高さの差が少ないことがわかる。

#### 4.5 100ステップごとの100ステップ前との高さの差の平均値の比較

シミュレーション結果を以下に示す。

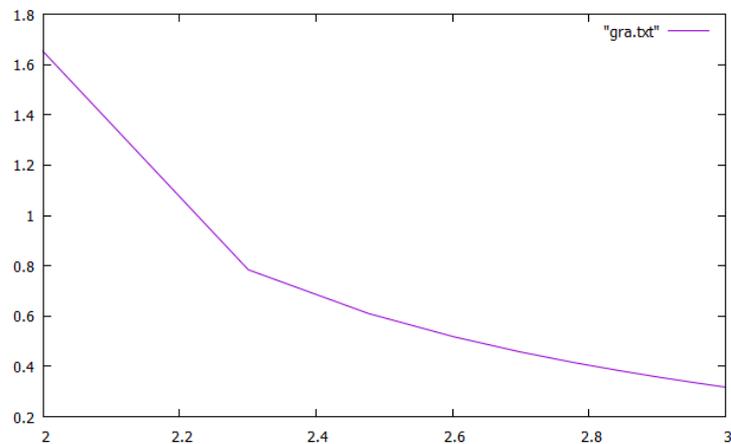


図15.モデル(A): $D_u=0.06$   $D_d=0.1$   $q=1$ の場合のステップ数と高さの差  
(横軸: $\log_{10}$ (ステップ数 $x$ ), 縦軸:高さの差の平均値 $y$ )

$x = 10^{2.3}$ の部分で大きくグラフが変わることがわかる、直線の近似を求めたのは $x \geq 10^{2.3}$ である

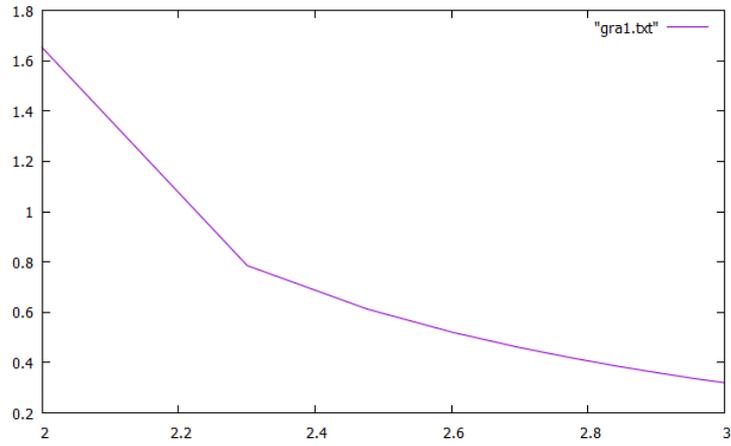


図16. モデル(B): $D_u=0.1$   $D_d=0.1$   $q=1$ の場合のステップ数と高さの差  
(横軸: $\log_{10}$ (ステップ数 $x$ ), 縦軸:高さの差の平均値 $y$ )

図15と同様のグラフができた

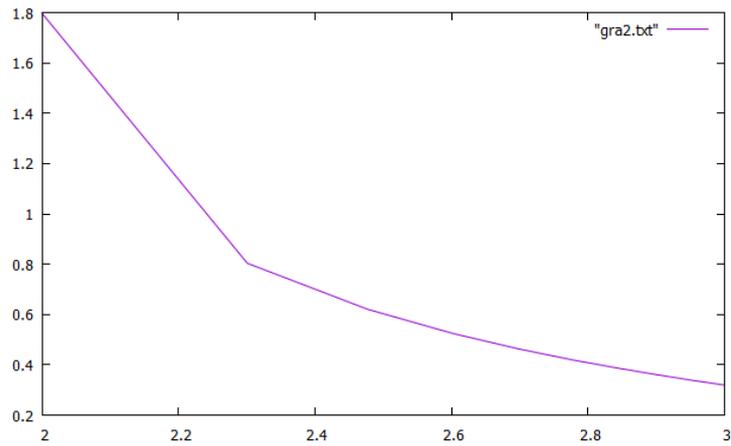


図17. モデル(C): $D_u=0.06$   $D_d=0.1$   $q=0.5$ の場合のステップ数と高さの差  
(横軸: $\log_{10}$ (ステップ数 $x$ ), 縦軸:高さの差の平均値 $y$ )

図15、図16と同様のグラフができた

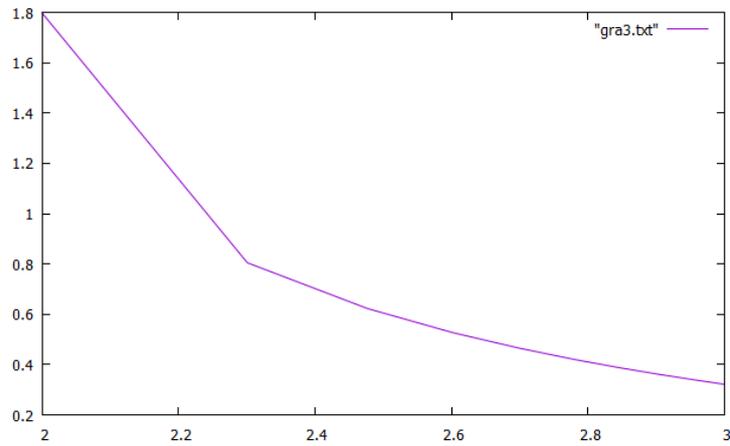


図18.モデル(D): $D_u=0.1$   $D_d=0.1$   $q=0.5$ の場合のステップ数と高さの差  
(横軸: $\log_{10}$ (ステップ数 $x$ ), 縦軸:高さの差の平均値 $y$ )

図15、図16、図17と同様のグラフができた

#### 4.6 べき乗則

まず図15～図18の $x \geq 10^{2.3}$ の部分で最小二乗法を用いて関数にフィッティングさせ、直線近似を求めた。 $y = bx^a$ としたときの結果を以下の表2に示す

表2. 近似式を求めた表

	$D_u=0.06$ $D_d=0.1$ $q=1$	$D_u=0.1$ $D_d=0.1$ $q=1$	$D_u=0.06$ $D_d=0.1$ $q=0.5$	$D_u=0.1$ $D_d=0.1$ $q=0.5$
$a$	-1.7881	-1.8047	-1.7543	-1.7696
$b$	2.0992	2.0988	2.1201	2.1199
相関係数	0.999	0.9989	0.9988	0.9987

表2より、パラメータを変えても傾きがほぼ変わらないことがわかる。つまり、パラメータによらずべき指数はほぼ同様であることがわかる。

## 5 結論

砂山モデル、砂丘形成モデルのどちらにもべき乗則が見られ、砂山モデルでは地震の頻度と規模の関係を表すグラフのべき指数が一致し、地震との関連性があることがわかった。砂丘形成モデルでは、パラメータを変えても同様のべき指数が見られ、風の強さなどによらずべき指数は変わらないことがわかった。

## 参考文献

- [1] [http://blog.livedoor.jp/toshi\\_tomie/archives/52034154.html](http://blog.livedoor.jp/toshi_tomie/archives/52034154.html)
- [2] <https://ja.wikipedia.org/wiki/グーテンベルグ・リヒター則>
- [3] H Niiya,A Awazu,H Nishimori. Physical Review Letters. 108,158001(2012)